

Opportunities to learn to justify in Israeli 7th-grade mathematics textbooks

Ruhama Even
Weizmann Institute of Science, Israel

Justifying

Important component of doing and learning
mathematics.

Textbooks and classroom teaching

In many countries textbooks considerably influence classroom instruction.

Teachers often:

- follow teaching sequences suggested by textbooks,
- base classwork on tasks included in textbooks.

Eisenmann & Even, 2011; Grouws, Smith & Sztajn, 2004;
Haggarty & Pepin, 2002

Research question

- What opportunities to learn to justify mathematical statements are offered in Israeli junior-high math textbooks?
 1. What **kinds** of justifications are offered?
 2. What **paths** of justifications are offered?

The Israeli context

- Centralized educational system.
- New junior-high school math curriculum.
- Emphasis on developing students' ability to explain, justify and prove.
- Textbooks are main source for teachers to plan lessons, to choose the content to be taught and the lesson activities to be conducted.
- Several parallel experimental curriculum programs (textbooks, teacher guides, ...).

Sample (statements)

10 key math statements from the curriculum:

- 5 in algebra (e.g., multiplication of negative numbers).
- 5 in geometry (e.g., the angle sum of a triangle).

Algebra statements

- $a(b+c) = ab + ac$, for any three numbers a , b , c .
- The product of two negative numbers is positive; its magnitude is the product of the two magnitudes.
- Division by zero is undefined.
- Performing a basic operation on both sides of an equation maintains their balance.
- Manipulating properties of real numbers transforms an algebraic expression into an equivalent expression (i.e., any substitution of numerical values into the expressions produces identical outcomes).

Geometry statements

- Vertically opposite angles are congruent.
- The area formula for a trapezium with bases a , b and altitude h is $\frac{(a + b) \cdot h}{2}$.
- The area formula for a circle with radius r is πr^2 .
- The angle sum of a triangle is 180° .
- Corresponding angles between parallel lines are equal.

Sample (textbooks)

Eight 7th grade textbooks:

- Six (A-F) designed for the general student population (upper 2/3).
- Two (G-H) for students with low achievements.

Chapters introducing each statement:

- Explanatory texts
- Collections of tasks
- 816 pages (3-49 pages for each statement, in each textbook).

Methods of analysis

1. Identifying instances of justification for each statement, in each textbook.
2. Coding (a) the justification type (b) the mathematical means, and (c) the contributor(s), for each instance of justification.
3. Constructing “path of justification” for each statement, in each textbook.
4. Comparative analysis.

Methods of analysis

1. Identifying instances of justification for each statement, in each textbook.
2. Coding (a) the justification type (b) the mathematical means, and (c) the contributor(s), for each instance of justification.
3. Constructing “path of justification” for each statement, in each textbook.
4. Comparative analysis.

Instance of justification for sum of the angles of a triangle

פעילות 6 – סכום הזוויות במשולש

א. היעזרו בסרטונים ועבדו לפי ההנחיות.

רשמו את הזוויות משני הצדדים.

א. גזרו מנייר משולש כרצונכם.

ב. קרעו את המשולש לחלקים, כך שכל חלק יכיל אחת מזוויות המשולש.

ג. סדרו את שלוש הזוויות של המשולש צמודות אחת ליד השנייה. מה קיבלתם?

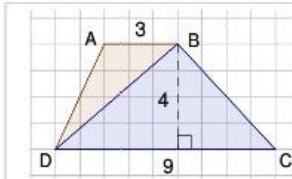
ד. נראה שלוש הזוויות יחד יוצרות זווית שטוחה. בדקו זאת באמצעות סרגל או דף נייר מלבני.

ב. מה ניתן להסיק מכך על סכום הזוויות במשולש?

ג. האם על-פי ההמחשה שראינו בפעילות זו ניתן להסיק שבכל משולש סכום הזוויות הוא 180° ?

Instance of justification for the area of a trapezium (1)

פעילות 4 – אפשר גם אחרת למצוא את השטח של טרפז



א. נעביר אלכסון BD ונחלק את שטח הטרפז לשני משולשים: $\triangle ABD$ ו- $\triangle BDC$. לשני המשולשים גובה משותף (4 ס"מ). שטח הטרפז ABCD הוא סכום השטחים של שני המשולשים:

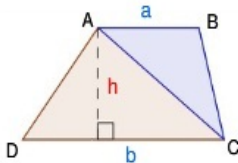
$$S_{\triangle ABD} = \frac{3 \cdot 4}{2} \quad S_{\triangle BDC} = \frac{9 \cdot 4}{2}$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ADB} + S_{\triangle BDC} = \frac{3 \cdot 4 + 9 \cdot 4}{2} = \frac{(3+9) \cdot 4}{2} = 24 \text{ סמ"ר}$$

נתבונן בחישוב האחרון שביצענו ונזהה את מרכיבי הנוסחה:
 גובה / אורך / בסיס קצר / בסיס ארוך
 $S_{ABCD} = \frac{(3+9) \cdot 4}{2}$
 אנו רואים כי ניתן לחשב שטח של טרפז על-ידי:
 חישוב סכום אורכי הבסיסים כפול אורך הגובה, וחילוק המכפלה שהתקבלה ב- 2.

Instance of justification for the area of a trapezium (2)

ב. נראה שהנוסחה לחישוב שטח של טרפז נכונה בכל המקרים. השלימו את הפרטים החסרים בהוכחה.



- נעביר אלכסון AC בטרפז. אלכסון זה מחלק את הטרפז ABCD לשני משולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle ADC$.
- לכן: $S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}$
- למשולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle ADC$ אותו גובה h (מדוע?).
- נרשום את נוסחת השטח. השלימו את הפרטים החסרים:

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{ah + bh}{2} = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

במילים אחרות: שטח הטרפז שווה לסכום אורכי הבסיסים, כפול אורך הגובה, חלקי 2.

Methods of analysis

1. Identifying instances of justification for each statement, in each textbook.
2. Coding (a) the justification type (b) the mathematical means, and (c) the contributor(s), for each instance of justification.
3. Constructing “path of justification” for each statement, in each textbook.
4. Comparative analysis.

Justification types (Modes of reasoning*)

- Appeal to authority
- Qualitative analogy

Empirical justifications

- Experimental demonstration
- Concordance of a rule with a model

Deductive justifications

- Deduction using a model
- Deduction using a specific case
- Deduction using a general case

(*Stacey & Vincent, 2009).

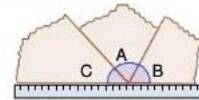
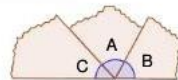
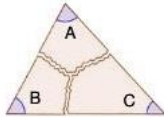
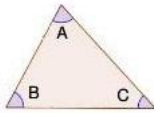
Justification type: Experimental demonstration

(Inferring/validating results based on examination of particular instances).

Mathematical means: “Measuring” the sum of the 3 angles.

a. Follow the instructions in the illustrations

Write the angles
on both sides



1. Cut any triangle out of a sheet of paper

2. Tear the triangle to pieces, such that each piece contains one angle of the triangle.

3. Place the three angles of the triangle adjacently. What did you get?

4. It appears that the three angles together form a straight angle. Test that with a ruler or a rectangular sheet.

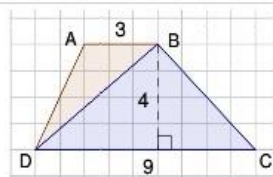
b. What can you deduce regarding the angle sum of the triangle?

c. Based on this demonstration, can we deduce that the angle sum of **any** triangle is 180° ?

Justification type: Deduction using a specific case (reasoning in terms of a specific case; each step is logically deduced).

Mathematical means: Dividing the trapezoid into “known” polygons.

פעילות 4 – אפשר גם אחרת למצוא את השטח של טרפז



a. נעביר אלכסון BD ונחלק את שטח הטרפז לשני משולשים: $\triangle ABD$ ו- $\triangle BDC$. לשני המשולשים גובה משותף (4 ס"מ). שטח הטרפז ABCD הוא סכום השטחים של שני המשולשים:

$$S_{\triangle ABD} = \frac{3 \cdot 4}{2} \quad S_{\triangle BDC} = \frac{9 \cdot 4}{2}$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ADB} + S_{\triangle BDC} = \frac{3 \cdot 4 + 9 \cdot 4}{2} = \frac{(3+9) \cdot 4}{2} = 24 \text{ סמ"ר}$$

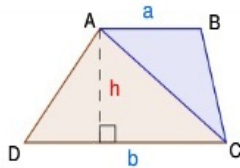
נתבונן בחישוב האחרון שביצענו ונזהה את מרכיבי הנוסחה:
אנו חאים כי ניתן לחשב שטח של טרפז על-ידי:
חישוב סכום אורכי הבסיסים כפול אורך הגובה, וחילוק המכפלה שהתקבלה ב- 2.

$$S_{ABCD} = \frac{(3+9) \cdot 4}{2}$$

Justification type: Deduction using a general case (reasoning in terms of a general case; each step is logically deduced).

Mathematical means: Dividing the trapezoid into “known” polygons.

ב. נראה שהנוסחה לחישוב שטח של טרפז נכונה בכל המקרים. השלימו את הפרטים החסרים בהוכחה.



• נביר אלכסון AC בטרפז. אלכסון זה מחלק את הטרפז ABCD לשני משולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle ADC$.

• לכן: $S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}$

• למשולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle ADC$ אותו גובה h (מדוע?).

• נרשום את נוסחת השטח. השלימו את הפרטים החסרים:

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{ah}{2} = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

במילים אחרות: שטח הטרפז שווה לסכום אורכי הבסיסים, כפול אורך הגובה, חלקי 2.

Methods of analysis

1. Identifying instances of justification for each statement, in each textbook.
2. Coding (a) the justification type (b) the mathematical means, and (c) the contributor(s), for each instance of justification.
3. Constructing “path of justification” for each statement, in each textbook.
4. Comparative analysis.

Paths of justification of area of trapezoid (4 textbooks)



Paths of justification in 1 textbook (4 statements)



Initial findings: general

- 224 instances of justification were identified in the textbooks.
- Most in the explanatory texts; some (12%) in the collections of tasks.
- The textbooks provided justifications for all analysed statements (with one exception).

Frequencies of types of justification by textbook											
type of justification	Textbook								Total		
	A	B	C	D	E	F	G	H	n	%	
Appeal to authority	0	0	0	0	1	0	1	0	2	0.9	
Qualitative analogy	1	0	0	0	2	0	0	0	3	1.3	
Experimental demonstr.	9	10	11	11	9	12	11	12	85	38	
Deduction using a model	8	3	3	2	3	3	3	3	28	13	
Deduction/specific case	9	9	9	4	10	5	5	9	60	27	
Deduction/general case	8	7	5	7	3	10	2	4	46	21	
Total per textbook	35	29	28	24	28	30	22	28	224	100	

Initial findings: types of justification

- Most types of justification (of the instances) were deductive (59%) or empirical (38%).
 - Stacey & Vincent's study of types of justification in Australia: 17% neither deductive nor empirical.
- **Experimental demonstration:** most common.
- **Deduction using a general case:** about 20% of all instances of justification.

Initial findings: paths of justification

Lengths of paths of justification:

- 1-7 instances of justification.

Variety of lengths:

- For the same statement across textbooks.
- For different statements in the same textbook.

Paths of justification:

- Include 2-4 types of justification (60%).
- Use the same type more than once (60%).
- Use the same math means more than once (25%).

Future potential collaboration

- Comparative study:
What opportunities to learn to justify mathematical statements are offered in mathematics textbooks in different countries?
 1. What **kinds** of justifications are offered?
 2. What **paths** of justifications are offered?
- The development of suitable conceptual frameworks and research tools.