

מכניקה סטטיסטית - תרגיל 2

ניתן בתאריך 12/04/2011 , להגשה בתאריך 03/05/2011

1 גז אידאלי תחת פוטנציאל מדרגה

בשיעורים הקודמים עסקנו בבעיה של מספר החלקיקים במחצית מיכל בו נמצא גז אידאלי. ראינו שמאוד לא סביר שמספר זה יסטה באופן משמעותי ממחצית החלקיקים. כעת נרצה לשלוט במספר החלקיקים הממוצע שבמחצית המיכל ע"י הפעלת פוטנציאל קבוע. נסתכל על גז אידאלי המורכב מ- N חלקיקים בעלי מסה m ונמצא במיכל מלבני בעל שטח A וגובה L . המיכל מצומד לאמבט חום בטמפ' T . נסמן את התנע של החלקיקים ב- $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N$ ואת מיקומן ב- $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N$. חוץ מאנרגיה קינטית על כל חלקיק פועל פוטנציאל:

$$V(\vec{q}_i) = \begin{cases} \epsilon & 0 \leq z_i \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} < z_i \leq L \end{cases}$$

1. כתבו את ההמילטוניאן של המערכת.
2. חשבו את פונקציית החלוקה של הגז ואת האנרגיה החופשית שלו.
3. חשבו את האנרגיה הפנימית, E , של הגז.
4. חשבו את מספר החלקיקים הממוצע בחלקו התחתון של המיכל, Q , ע"י גזירת האנרגיה החופשית לפי ϵ . כיצד ניתן להסיק את התשובה לסעיף זה מהתשובה של סעיף 3?
5. הפוטנציאל שהגדרנו יכול לתאר מצב בו המערכת שלנו מתארת שני מיכלים המחוברים ביניהם בצינור דק (מספר החלקיקים בצינור עצמו זניח), כאשר החצי התחתון מונח בגובה נמוך יותר. מה צריך להיות הפרש הגבהים בין שני המיכלים כדי ש- $\langle Q \rangle = 0.6N$ (המיכלים נמצאים בטמפ' של $T = 300K$ והגז בהם מורכב ממולקולות חמצן, O_2)? האם אתם מצפים שהפרש הגבהים שנדרש ב- $T = 100K$ יהיה גדול או קטן יותר?

2 גז אידאלי בשדה כבידה

בהמשך לשאלה הקודמת, בשאלה זו ננסה להבין בעזרת מודל פשוט מדוע כיצד מתנהג אוויר באטמוספירה. לשם כך נמדל את מולקולות האוויר כגז אידאלי בשדה כבידה. שדה הכבידה משרה פוטנציאל שמשתנה באופן רציף במרחב, בשונה מהשאלה הקודמת. במודל זה בנוסף לאנרגיה הקינטית לכל חלקיקי יש אנרגיה פוטנציאלית. נניח כי הגז מורכב מ- N חלקיקים זהים בעלי מסה m ונמצא במיכל מלבני בעל שטח A וגובה L . המיכל מצומד לאמבט חום בטמפ' T . נסמן את התנע של החלקיקים ב- $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N$ ואת מיקומן ב- $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N$.

1. כתבו את ההמילטוניאן של המערכת.
2. חשבו את פונקציית החלוקה של הגז ואת האנרגיה החופשית.
3. חשבו את האנרגיה הפנימית, E , של הגז. מהו הביטוי בגבול $L \rightarrow \infty$? מהי המשמעות הפיזיקלית של התוצאה?
4. בשונה ממערכות שהכרנו עד היום, המערכת בה אנו עוסקים איננה הומוגנית. השינוי המרחבי של הפוטנציאל הכבידתי גורם לכך שצפיפות החלקיקים משתנה במרחב ואיתה שאר המשתנים האינטנסיבים של המערכת. בכל זאת, ניתן לחשב את הלחץ הממוצע המופעל על צידי המיכל, $P = -\frac{1}{L} \frac{\partial F}{\partial A}$. מהי התלות של הלחץ הממוצע בתאוצת הכבידה g ? חשבו על הסבר לתוצאה זו.
5. חשבו את הגובה הממוצע של מולקולה ע"י גזירת האנרגיה החופשית לפי g . העריכו את הגובה הממוצע של מולקולת אוויר באטמוספירה של כדור הארץ בעזרת הגבול $L \rightarrow \infty$. הניחו תאוצת כבידה אחידה, $g = 9.8 \frac{m}{sec^2}$, טמפ' אחידה של $T = 300K$ ושהאוויר מורכב כולו ממולקולות חנקן, N_2 .

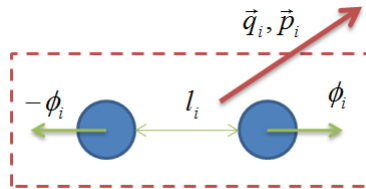
6. על מנת להבין את התנהגות הגז בגבול $L \rightarrow \infty$ נחשב את צפיפות הגז בגובה מסוים z ע"י חישוב האינטגרל

$$\rho(z) = \int d^3q_1 \dots d^3q_N d^3p_1 \dots d^3p_N \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(z - z_i) \right) P(\{\vec{q}_i, \vec{p}_i\})$$

חשבו את $\rho(z)$ ושרטטו אותו בעזרת אקסל עבור $L = \frac{1}{2} \frac{k_B T}{mg}$, $L = 2 \frac{k_B T}{mg}$ ו- $L = 10 \frac{k_B T}{mg}$. האם שרטטוטים אלו עוזרים לנו להבין את התנהגות הגובה הממוצע שחושב בסעיף 5 בגבול $L \rightarrow \infty$? מחלת גבהים מופיעה החל מגובה 2400 מטרים, על פי המודל שחיבתם פי כמה נמוכה צפיפות האוויר בגובה זה מאשר בגובה פני הים?

3 גז מולקולרי

בשאלה הקודמת התייחסנו למולקולות האוויר כחלקיקים של גז אידאלי. במציאות רוב מולקולות האוויר מורכבות משני אטומים ולכן בעלות דרגות חופש פנימיות. על מנת להבין את ההשפעה של דרגות החופש הפנימיות על התנהגות הגז נחשוב על גז המורכב מאוסילטורים הרמוניים חד מימדיים (קפיצים). נניח כי הגז מורכב מ- N מולקולות בעלות מסה $2m$ ונמצא במיכל בעל נפח V המצומד לאמבט חום בטמפ' T . נסמן את התנע של המולקולות ב- $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N$ ואת מיקומן ב- $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N$. כל חלקיק מורכב משני אטומים בעלי מסה m הנמצאים במרחק l_i ובעלי תנע $\pm \phi_i$ (ראה שרטוט). נסמן את 'קבוע הקפיץ' של כל מולקולה כזאת ב- k , כל שהאנרגיה הפוטנציאלית של כל מולקולה היא $\frac{1}{2} k l_i^2$.



1. כתבו את ההמילטוניאן של המערכת.
2. חשבו את פונקציית החלוקה של הגז ואת האנרגיה החופשית של הגז. רישמו את האנרגיה החופשית כך שתהיה מורכבת משני איברים שאחד מהם זהה לזה של גז אידאלי. מה מתאר האיבר השני?
3. חשבו את האנרגיה הפנימית, E , של הגז. האם התוצאה תואמת את משפט החלוקה השווה?
4. חשבו את הלחץ של הגז $P = -\frac{\partial F}{\partial V}$ ורשמו את משוואת המצב של הגז. האם היא שונה מזו של גז אידאלי?
5. אנו יודעים שהמרחק הממוצע בין מולקולות חמצן הוא בערך $3.6 \cdot 10^{-10} m = 0.36 nm$. חשבו מהו קבוע הקפיץ המתאים למולקולת חמצן לפי מודל פשטני זה ע"י חישוב ערך התצפית של המרחק. הניחו $T = 300 K$.