

מכניקה סטטיסטית – דף תרגיל 4

ניתן בתאריך: 26.5.11. להגשה בתאריך: 9.6.11

1 גזים איזואליים קוונטיים: חישוב סדרי גודל

מטרת שאלה זו לפתח אינטואיציה מתי אפקטים קוונטיים משפיעים על תכונות חומרים.

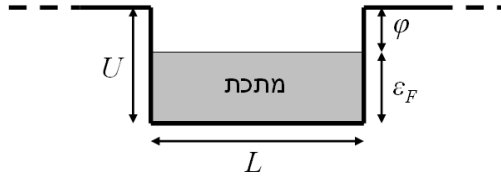
א. עבור כל אחד מהחומרים בטבלה מצאו את אנרגיית פרמי ϵ_F ואת טמפ' פרמי $T_F = \epsilon_F/k_B$ (זו הטמפ' שמאפיינת מתי אפקטים קוונטיים יהיו מורגשים במערכת של פרמיונים. עבור טמפ' נמוכות $T \ll T_F$ גז הפרמיונים יהיה מנוון לגמרי, בעוד שבטפ' גבוהות $T \gg T_F$ הגז יתנהג כגז קלאסי). השוו את T_F לטמפ' החדר ($T \approx 300^\circ\text{K}$). כמו כן חשבו את אורך הגל התרמי והשוו אותו לצפיפות.

מסה (Kg)	צפיפות (m^{-3})	
$9 \cdot 10^{-31}$	10^{29}	אלקטרונים במתכת אופיינית
$1.6 \cdot 10^{-27}$	10^{44}	נוקליאונים (=פרוטונים ונויטרונים) בגרעין כבד אופייני
$4.6 \cdot 10^{-27}$	$2.6 \cdot 10^{28}$	אטומים של ${}^3\text{He}$ בהליום נוזלי

ב. העריכו את אורך הגל התרמי של גזי מימן (משקל אטומי 1), הליום (משקל אטומי 4) וחמצן (משקל אטומי 16) בטמפ' החדר ובלחץ אטמוספרי ($P \approx 10^5 \text{Pa}$). חשבו את $n\lambda_T^3$ (כאשר $n = N/V$ היא צפיפות הגז) וקבעו האם אפקטים קוונטיים משמעותיים עבור תכונות גזים אלה. העריכו באילו טמפ' אפקטים קוונטיים יתחילו להיות מורגשים בכל אחד מן הגזים הללו.

2 מודל פשטני של אלקטרונים במתכת

במתכות, חלק מהאלקטרונים קשורים לאטומי הגביש, ואילו השאר נעים באופן חופשי. אם נזניח את האינטראקציות הקולומביות בין האלקטרונים, נוכל באופן פשטני להתייחס לאלקטרונים החופשיים כאל גז איזואלי של פרמיונים שנעים בבור פוטנציאל מלבני תלת-מימדי, כפי שמשורטט באופן סכמטי באיור 1 (בור פוטנציאל זה הוא תיאור פשטני של משיכת האלקטרונים אל היונים החיוביים המרכיבים את גביש המתכת). מימדי בור הפוטנציאל הם $L \times L \times L$, ועומקו $U = \phi + \epsilon_F$, כאשר ϵ_F היא אנרגיית פרמי של המתכת, ו- ϕ נקראת פונקציית העבודה של המתכת. נניח כי בור הפוטנציאל עמוק מספיק, כך שרמות האנרגיה של אלקטרון שכלוא בו שוות בקירוב לרמות האנרגיה של חלקיק בבור פוטנציאל אינסופי. נניח גם שאלקטרונים שמשחררים מן הבור מתנהגים כחלקיקים חופשיים לגמרי. צפיפות האלקטרונים בבור נתונה על ידי $n_m = N_m/L^3 = 10^{29} \text{m}^{-3}$. המערכת נמצאת בטמפ' T .



איור 1: תרשים סכמטי של מודל המתכת בשאלה 1 ג'.

החדר. כפי שהייתם אמורים לראות בשאלה 1, גז אלקטרונים אידאלי בצפיפות בטמפ' n_m בחדר מנוון לגמרי, ולכן ניתן להתייחס לאלקטרונים שבתוך הבור כאילו הם בטמפ' $T_m \approx 0$. האלקטרונים שבתוך המתכת נמצאים בשיווי משקל תרמודינמי עם אלה שמחוץ לה. הניחו שצפיפות גז האלקטרונים שמחוץ לבור, n_g , נמוכה מספיק כך שניתן להתייחס אליו כאל גז קלאסי.

א. על ידי השוואת הפוטנציאל הכימי של הגז החופשי עם זה של המתכת, חשבו את n_g . העריכו את n_g עבור $U = 10 \text{ eV}$ בטמפ' החדר, וודאו שבתנאים אלה הגז החופשי אכן ניתן לתיאור כגז קלאסי.

ב. חשבו את לחץ גז האלקטרונים בתוך המתכת והשוו אותו ללחץ גז האלקטרונים מחוץ למתכת. הסבירו בקצרה את ההבדל הגדול בין שני הערכים שמצאתם.

ג. אם נקטין את L מבלי לשנות את U ואת מספר האלקטרונים הכולל (בתוך המתכת ובגז), האם n_g יגדל או יקטן? הסבירו באופן אינטואיטיבי מה יקרה.

3 פרמיונים עם אנרגיה קינטית לא ריבועית

בכיתה דנתם בגז פרמיונים אידאלי עם אנרגיה קינטית ריבועית בתנע: $\varepsilon(\vec{p}) = |p|^2/2m$. עתה נחקור גז פרמיונים שבו האנרגיה הקינטית איננה ריבוע התנע. מטרת השאלה היא לחזור על המתכון לפתרון בעיות בפיסיקה סטטיסטית קוונטית, ולתרגל כיצד מחשבים את צפיפות המצבים.

נתון גז אידאלי של פרמיונים שחופשיים לנוע בתיבה בנפח $V = L^3$. האנרגיה הקינטית של כל חלקיק ניתנת על ידי $\varepsilon(\vec{p}) = c|p|^\alpha$, כאשר c ו- α הם קבועים. ההמילטוניאן של המערכת הוא אם כן $\mathcal{H} = \sum_i c|p_i|^\alpha$. דוגמה פיסיקלית לגז כזה הוא גז מאוד יחסותי, שמהירות החלקיקים בו קרובה למהירות האור. במקרה זה $\alpha = 1$ ו- c היא מהירות האור. אנו נפתור עבור α כללי.

א. נדון תחילה (לפי המתכון) בבעיה הקוונטית של חלקיק בודד. הפונקציות העצמיות של אופרטור התנע הקוונטי $\vec{p} \equiv -i\hbar\vec{\nabla}$ הן כידוע $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$. הראו שאלו גם הפונקציות

העצמיות של ההמילטוניאן של חלקיק בודד במקרה שלנו, ומצאו את ערכי האנרגיה המתאימים. הניחו לצורך פשטות תנאי שפה מחזוריים עבור פונקציית הגל (כלומר, $\psi(0, y, z) = \psi(L, y, z)$ וכנ"ל בכיוון y ו- z).

ב. חשבו את צפיפות המצבים $g(\varepsilon)$ וכתבו את הביטוי האינטגרלי עבור מספר החלקיקים N , האנרגיה הפנימית E , והלחץ P כפונקציה של הנפח, הפוטנציאל הכימי והטמפרטורה. אין צורך לחשב את האינטגרלים.

ג. בעזרת אינטגרציה בחלקים, הראו שמתקיים הקשר $E = \gamma PV$ כאשר γ הוא קבוע שתלוי רק ב- α , ומצאו את γ .

ד. בטמפרטורה אפס ניתן להעריך את האינטגרלים שקיבלתם בסעיף ב' אנליטית. עבור $T = 0$ מצאו את מספר החלקיקים $N(\mu, V)$ וממנו חשבו את אנרגיית פרמי $\varepsilon_F(N, V)$. חשבו גם את האנרגיה הפנימית והלחץ בטמפרטורה אפס כפונקציה של ε_F .

4 חלקיקים עם סטטיסטיקת ביניים

בשאלה זו נדון בחלקיקים היפותטיים עם סטטיסטיקת ביניים, בין פרמיונים לבוזונים. מטרת השאלה היא לחזור על הפיתוח של התפלגויות בוז-איינשטיין ופרמי-דירק על מנת להבין פיתוח זה טוב יותר.

נניח שקיימים חלקיקים עם התכונה הבאה: כל מצב קוונטים יכול להיות מאוכלס לכל היותר על ידי ℓ חלקיקים (כזכור, עבור בוזונים $\ell = \infty$, בעוד שעבור פרמיונים $\ell = 1$).

א. עקבו אחרי הפיתוח מן הכיתה של התפלגויות בוז-איינשטיין ופרמי-דירק, וחשבו בדרך דומה את האכלוס הממוצע $n(\varepsilon)$ של רמת אנרגיה ε בצבר הגרנד קנוני. היעזרו בנוסחה לסכום של טור הנדסי: $\sum_{k=0}^{\ell} x^k = \frac{1-x^{\ell+1}}{1-x}$. ודאו כי עבור $\ell = 1$ ו- $\ell = \infty$ מתקבלות התוצאות הרצויות.

ב. שרטטו באופן סכמטי את $n(\varepsilon)$ בטמפ' $T = 0$, והסבירו בקצרה את התוצאה. חשבו את אנרגיית פרמי עבור גז אידאלי של N חלקיקים מסוג זה הנמצא בתיבה בנפח V . כיצד משתנה אנרגיית פרמי כאשר ℓ גדל?