

# מכניקה סטטיסטית – דף תרגיל 6

ניתן בתאריך: 16.6.11. להגשה בתאריך: 30.6.11

## 1 התעבות בוז-איינשטיין בפוטנציאל הרמוני

בשנת 1995 אריק קורנל וקרל ויימן במעבדת JILA, ובאופן בלתי תלוי גם ולפנג קטרל באוניברסיטת MIT, הצליחו לראשונה לצפות באופן נסיוני בהתעבות בוז-איינשטיין (השלושה קיבלו על הישגיהם פרס נובל בפיסיקה בשנת 2001. ניסויים דומים מבוצעים היום במכון ויצמן). קורנל וויימן לכדו בניסוי שלהם אטומי רובידיום-87 בפוטנציאל חיצוני הרמוני שאותו הם יצרו בעזרת לייזר ושדות מגנטיים. בשאלה זו נחקר באופן תיאורטי התעבות בוז-איינשטיין בפוטנציאל הרמוני כזה.

$N$  בוזונים נתונים בפוטנציאל הרמוני תלת-מימדי בטמפ'  $T$ .

א. כידוע, רמות האנרגיה של אוסילטור הרמוני קוונטי הן  $\hbar\omega(n_x + n_y + n_z)$ , כאשר  $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$ . לכן, האנרגיות האפשריות של המערכת הן תמיד מהצורה  $\epsilon_\ell = \hbar\omega\ell$  כאשר  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ . הראו שנייון מצב האנרגיה  $\epsilon_\ell$  הוא  $(\ell+1)(\ell+2)/2$  (כלומר, שזהו מספר המצבים הקוונטיים השונים עם האנרגיה  $\epsilon_\ell$ ). רמז: חשבו בכמה דרכים שונות ניתן לחלק  $\ell$  כדורים זהים בין שלושה אנשים.

ב. מצאו את הנוסחה עבור צפיפות המצבים  $g(\epsilon)$  (הניחו ש- $\ell \gg 1$ ).

ג. מצאו את הנוסחה לטמפ' הקריטית להתעבות בוז-איינשטיין. בניסוי אופייני, מספר החלקיקים הוא  $N \approx 10^6$  ותדירות הפוטנציאל ההרמוני  $\omega \approx 600\text{Hz}$  (מסיבות טכניות, הפוטנציאל האמיתי בניסוי איננו איזטרופי, כלומר, התדירות בציר  $z$  שונה מן התדירויות בציר  $x$  ו- $y$ ). לצורך פשטות נתעלם מעובדה זו. חשבו מה הטמפ' של ההתעבות במקרה זה. היעזרו בזהות:  $\frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \equiv g_3(1) \approx 1.2$ .

ד. חשבו את מספר החלקיקים ברמת היסוד כפונקציה של הטמפ'. שרטטו באופן סכמטי את התוצאה.

## 2 גז בוזונים חד-מימדי ודו-מימדי

א. נתון גז של  $N$  בוזונים בעלי מסה  $m$ , שנמצאים ב"תיבה" חד-מימדית באורך  $L$  ובטמפ'  $T$ . כתבו את הביטוי האינטגרלי המקשר בין מספר החלקיקים ל- $z$  (הפוגסיות). הראו שאין התעבות בוז-איינשטיין בגז זה.

ב. חזרו על סעיף א' עבור בוזונים שנמצאים ב"תיבה" דו-מימדית בעלת שטח  $A = L^2$ .

<sup>1</sup>למעשה, רמות האנרגיה הן  $\hbar\omega(n_x + n_y + n_z + 3/2)$ , אולם מאחר שהאנרגיה נקבעת עד כדי קבוע, ניתן להגדיר את רמת היסוד להיות באנרגיה אפס.