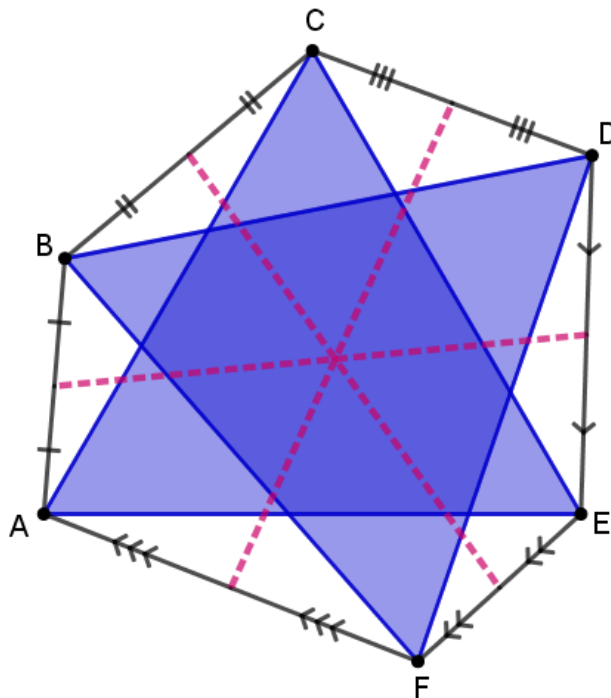


האולימפיאדה הארצית על שם פרופ' גיליס, תש"פ

1. נתונים שבעה מטבעות זהים למראה, ארבעה מתוכם אמיתיים ושלושה מזויפים. שלושת המטבעות המזויפים זהים במשקליהם וכן ארבעת המטבעות האמיתיים זהים במשקליהם. ידוע כי מטבע מזויף הוא קל יותר ממטבע אמיתי. בשקילה אחת ניתן לבחור בשתי קבוצות של מטבעות ולבדוק מי מהן קלה יותר, או אם משקליהן זהה. כמה שקילות נחוצות על מנת לאתר מטבע מזויף אחד לפחות.

2. לכנס מתמטי הגיעו 202 משתתפים משלוש מדינות: ישראל, יוון ויפן. ביום הראשון, כל זוג משתתפים מאותה מדינה לחצו ידיים. ביום השני, כל זוג משתתפים שאחד מהם ישראלי והשני אינו ישראלי לחצו ידיים. ביום השלישי, כל זוג משתתפים שאחד מהם ישראלי והשני יווני לחצו ידיים. סך הכול, התרחשו 20200 לחיצות ידיים. כמה משתתפים ישראליים היו בכנס?



3. במשושה קמור $ABCDEF$ המשולשים ACE ו- BDF משוכללים וחופפים. הראו כי שלושת הקטעים המחברים את אמצעי הצלעות הנגדיות של המשושה נחתכים בנקודה אחת.

4. בתחילת היום, על הלוח רשומים ארבעה מספרים שלמים (a_0, b_0, c_0, d_0) . בכל דקה, דני מחליף את ארבעת המספרים שעל הלוח ברביעיית מספרים חדשה לפי הכלל הבא: אם המספרים הרשומים על הלוח הם (a, b, c, d) , ראשית דני מייצר את המספרים

$$a' = a + 4b + 16c + 64d$$

$$b' = b + 4c + 16d + 64a$$

$$c' = c + 4d + 16a + 64b$$

$$d' = d + 4a + 16b + 64c$$

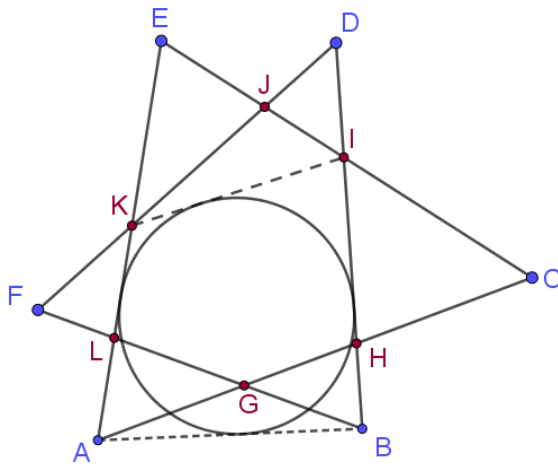
ולאחר מכן הוא מוחק את המספרים (a, b, c, d) ורושם במקומם את המספרים

$(a'd', d'c', c'b', b'a')$. לאילו רביעיות

התחלתיות (a_0, b_0, c_0, d_0) ירשום דני

בסופו של דבר רביעיית מספרים שכולם

מתחלקים ב- 5780^{5780} ?



5. נתונים שני משולשים BDF, ACE

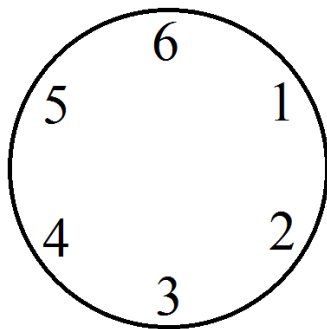
שנחתכים ב-6 נקודות: G, H, I, J, K, L

כמתואר בציור. נתון כי בכל אחד מהמרובעים

EFGI, DELH, CDKG, BCJL, ABIK

ניתן לחסום מעגל. האם ייתכן שגם במרובע

FAHJ ניתן לחסום מעגל?



6. במעגל רשומים המספרים 1 עד 6 לפי הסדר, כמתואר בציור.

בכל מהלך, ליאור בוחר מספר כלשהו a במעגל ששכניו b, c ורושם

במקומו את המספר $\frac{bc}{a}$. האם ליאור יכול להגיע למצב שבו מכפלת

המספרים במעגל גדולה מ- 10^{100} ?

(א) ב- 100 מהלכים.

(ב) ב- 110 מהלכים.

7. בתוך משולש נמצאת נקודה P, שמרחקיה מהישרים עליהם נמצאות צלעות המשולש הם

d_a, d_b, d_c . נסמן ב- R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש וב- r את רדיוס המעגל החוסם

במשולש. הראו כי $\sqrt{d_a} + \sqrt{d_b} + \sqrt{d_c} \leq \sqrt{2R + 5r}$.

בהצלחה!