

אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1984

1. הוכח כי למשוואה

$$6^x = y^2 + y - 2$$

אין פתרון במספרים שלמים.

2. אם  $m, n$  הם מספרים שלמים וחזיביים,  $c$  מספר לא רציונלי ו- $d = 1/c$ , הוכח כי

$$\sum_{j=0}^{[m+nc]} [(n+1) + (m-j)d] = \sum_{j=0}^{[n+md]} [(m+1) + (n-j)c]$$

(הסימן  $[x]$  מציין את החלק השלם של  $x$ . לדוגמא:  $[2.7] = 2$ ,  $[1.9] = 1$ ,  $[1.0] = 1$ .)

3. הנקודות  $X, A, B, C, D$  נמצאות על קו ישר  $l$ .  $H$  היא נקודה כלשהי מחוץ ל- $l$  ו- $K$  נקודה שניה כלשהי על הישר  $XH$ . הישרים  $HA, KB$  נפגשים ב- $P$ . הישרים  $KD$  ו- $HC$  נפגשים ב- $Q$ . הקו הישר  $PQ$  נפגש עם  $l$  ב- $Y$ . הוכח כי מקומה של  $Y$  על  $l$  תלוי אך ורק

ב- $X, A, B, C, D$  ולא במקומן של  $H, K$ .

4. הוכח כי עבור כל  $n$  טבעי גדול מ-1, המספר

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}$$

אינו רציונלי.

5. לגבי הזוויות  $x, y, z$  ידוע כי

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2\pi, \\ \cos x \cos y \cos z &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

הוכח כי

$$4 \cos 3x \cos 3y \cos 3z - 12 \cos 2x \cos 2y \cos 2z = 1. \quad (1.1)$$

6. עבור אילו ערכים ממשיים של  $a$  יש למשוואה

$$a^2 \left| a + \frac{x}{a^2} \right| + |1+x| = 1 - a^3$$

יותר משלושה פתרונות שהם מספרים שלמים?

7. נתונה פירמידה  $MABC$  אשר בה המקצועות  $MC, MB, MA$  מאונכים זה לזה.  $S_1, S_2, S_3$  הם שטחי הפיאות  $MAB, MCA, MBC$  בהתאמה ו- $h$  הוא אורך הגובה מ- $M$  לבסיס  $ABC$ , הוכח כי

$$S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{9h^2}{2}$$

8. מצא מספר טבעי  $k$  כך שכל הפתרונות של המשוואה

$$(2\sqrt{2}\cos 25^\circ - 1)\tan x^\circ = (2\sqrt{2}\sin 25^\circ - 1)\tan kx^\circ$$

(במעלות) יהיו מספרים שלמים.

9. נסמן ב- $\sigma(n)$  את סכום המחלקים של מספר טבעי  $n$

(דוגמא: מחלקי 12 הם 1, 2, 3, 4, 6, 12 ולכן  $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$ .)

הוכח כי קיימים אינסוף מספרים  $n$  עבורם  $\sigma(n!) > 3n!$ .

10. נתונה קבוצה  $A$  של 21 מספרים טבעיים, כולם שונים זה מזה וקטנים מ-65, כלומר

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{20} < a_{21} \leq 64$$

$B$  היא קבוצת כל ההפרשים האפשריים  $a_j - a_i$  ( $1 \leq i < j \leq 21$ ).

הוכח כי לפחות אחד מהמספרים 5, 6, 11 נמצא בקבוצה  $B$ .