

אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1990

1. מצא את כל הפתרונות הממשיים של המשוואה

$$(5750 - 50x)^4 + (1990 - 10x)^4 = (40x - 3760)^4.$$

2. הוכח כי לא יתכן מצולע קמור בעל יותר משלוש זוויות חדות.

3. מהם הערכים האפשריים של k אם נתון כי כל ארבעת הפתרונות של המשוואה

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = k$$

הם שלמים?

4. בעיגול בעל רדיוס R נמצאות n ($n > 1$) נקודות. הוכח כי קיים לפחות זוג אחד מבין הנקודות האלה שהמרחק ביניהן קטן מ- $\frac{2R}{\sqrt{n}-1}$.

5. הוכח כי אי אפשר למצוא מספרים ממשיים x, y, z המקיימים

$$\cos(y - z) + \cos(z - x) + \cos(x - y) + 2 = 0.$$

6. הוכח כי עבור כל n טבעי ניתן למצוא קבוצה של n נקודות במישור, לא כולן על קו ישר אחד, אשר המרחק בין כל שתיים מהן הוא מספר שלם.

7. במשולש שכל זוויותיו חדות, חסום רבוע. הוכח כי מרכז המעגל החסום במשולש נמצא בפנים הרבוע.

8. נתון כי a, b, c הם מספרים חיוביים המקיימים $a + b + c = \sqrt{3}/2$.

מצא את השלשות x, y, z של מספרים חיוביים כך שמתקיים

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = \sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = \sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = 1 \quad (1.3)$$