

אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1993

1. המספר הממשי a מקיים $a > 0, a \neq 1$. m הוא מספר ממשי כלשהו. פתור את המשוואה

$$\log_{\sqrt{a}} \sqrt{x} = \log_a \left(\frac{m}{x} + 1 \right).$$

האם קיים תמיד פתרון? נמק.

2. הוכח כי עבור a, b, c חיוביים כלשהם קיים

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

3. הוכח כי אין מספרים טבעיים x, y המקיימים

$$x^3 + y^3 = 5753^2.$$

4. במשולש ABC , $AC < AB$. הנקודות X, Y נמצאות על AB, BC בהתאמה כך

$$AX = BY \text{ ש-} XY > \frac{1}{2}AC$$

הערה: השאלה כפי שנוסחה אינה נכונה. במקום פתרון תן דוגמה נגדית.

5. חלץ את x, y מהמערכת

$$\sin x + \sin y = 2a,$$

$$\cos x + \cos y = 2b,$$

$$a, b > 0,$$

כאשר $0 \leq x, y \leq 2\pi$.

6. מצא את המספרים הטבעיים n, a_1, a_2, \dots, a_n כך שמתקיים

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1993$$

ואילו $\prod_{i=1}^n a_i$ יהיה מירבי.

7. נתונה תיבה רבועית ישרה עם צלע הבסיס $2a$ וגובה $a(1 + \sqrt{3})$. בסיס אחד של התיבה

חסום בכדור והבסיס השני משיק לאותו כדור. מצא את רדיוס הכדור וגם את השטח של

אותו חלק מהתיבה הנמצא בפנים הכדור.