אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע״ש פרופ׳ גיליס 1994

1. ABC הוא משולש נתון. הישר L עובר דרך C ומקביל ל-AB. חוצה הזוית A פוגש את L ב-E ואת הצלע CB ב-D. חוצה הזוית B פוגש את L ב-G ואת הצלע AC ב-F. נתון כי $DE = FG$. הוכח כי המשולש שווה שוקיים.

2. נתונים שני מספרים טבעיים p ו-q. נתונה פונקציה f המוגדרת עבור מספרים חיוביים ומקבלת ערכים חיוביים בלבד כך ש-$f(xf(y)) = x^p y^q$. הוכח כי q הוא רבוע שלם.

3. נתון צלעון בעל 1994 צלעות באורכים

$$a_i = \sqrt{4 + i^2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 1994.$$

הוכח שלא כל קודקודיו נמצאים על נקודות סריג (נקודות סריג הן נקודות ששעוריהן הם מספרים שלמים).

4. מצא את הערך הקטן ביותר של מספר N כך שכל תת קבוצה של $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ בעלת N איברים מכילה סדרה חשבונית בעלת 11 איברים שונים.

5. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ הם מספרים נתונים, שלא כולם 0. $r_1, r_2, \ldots, r_n$ הם מספרים ממשיים כך שלכל $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ממשיים מתקיים

$$r_1(x_1 - a_1) + \cdots + r_n(x_n - a_n) \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} - \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

חשב את $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

6. נתון מספר טבעי $N > 1$. הוכח כי קיימת כפולה של N שאינה עולה על N^4 שבכתיבתה בבסיס 10 משתמשים ב-4 ספרות שונות לכל היותר.

7. ABC הוא משולש ישר זוית עם $\angle C = 90^\circ$. P ו-Q הן נקודות על הצלעות CA ו-CB או המשכיהן בהתאמה, כך שמתקיים

$$\angle CQA = \angle CAB, \quad \angle CPB = \angle CBA.$$

R ו-S הן נקודות על AC ו-BC בהתאמה כך ש-$\angle ABR = \angle BAS = 90^\circ$. מצא את זויות המשולש ABC עבורן הביטוי $\dfrac{CP}{AR} \cdot \dfrac{CQ}{BS}$ הוא מקסימלי וחשב מקסימום זה.