אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1997

1. מצא את כל הפתרונות הממשיים למערכת המשוואות

$$x^2 + y^2 = 6z, \quad y^2 + z^2 = 6x, \quad z^2 + x^2 = 6y$$

2. לרשותך מאזניים עם שתי כפות, ומותר להניח משקולות על כל כף.

א. תן דוגמא של מערכת בת 4 משקולות כך שאפשר לשקול באמצעותה כל משקל שלם בין 1 ל-40 גרם.

ב. האם קיימת מערכת בת 4 משקולות כך שאפשר לשקול כל משקל שלם בין 1 ל-50 גרם?

3. נסמן ב-"$n?$" את המכפלה של כל המספרים הראשוניים הקטנים מ-n. הוכח כי $n? > n$ לכל n טבעי גדול מ-3.

4. f היא פונקציה רציפה ועולה (במובן הצר) על הקטע $[0,1]$, כך ש-$f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
נסמן ב-g את הפונקציה ההפוכה ל-f, כך ש-$g(f(x)) = x$ עבור כל x.
הוכח את האי-שוויון

$$f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{2}{10}\right) + \ldots + f\left(\frac{9}{10}\right) + g\left(\frac{1}{10}\right) + g\left(\frac{2}{10}\right) + \ldots + g\left(\frac{9}{10}\right) \le \frac{99}{10}$$

5. המספרים הטבעיים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (עבור $n \ge 12$) כולם קטנים מ-$9n^2$ וזרים בזוגות (כלומר לאף זוג מספרים אין מחלק משותף). הוכח כי לפחות אחד מהמספרים הוא ראשוני.

6. במדינה מסוימת בין כל שתי ערים יש או כביש או מסילת רכבת (לא שניהם ביחד). הוכח כי אפשר לבחור באמצעי תחבורה אחד כך שאפשר יהיה להגיע באמצעותו מכל עיר לכל עיר עם לא יותר משתי ערים נוספות בדרך.

7. מריבוע בעל צלע 10^6 הוסרה פינה ריבועית עם צלע של 10^{-3}. הצורה הגיאומטרית הנותרת מחולקת ל-10 מלבנים. הוכח כי לפחות באחד מהמלבנים היחס בין הצלעות הוא לפחות $1:9$.

8. שני מעגלים בעלי רדיוסים שווים משיקים למעגל גדול יותר מבפנים בנקודות A ו-B. תהי M נקודה כלשהי על המעגל הגדול. נסמן ב-A' ו-B' את נקודות החיתוך של MA ו-MB עם המעגלים הקטנים המתאימים. הוכח כי AB מקביל ל-$A'B'$.