אולימפיאדת גיליס במתמטיקה תשע"א
פתרונות

1. נתונות 5771 משקולות שמשקליהן בגרמים 1, 2, 3, ..., 5770, 5771. מחלקים את המשקולות למספר קבוצות שוות משקל. מהו המספר המירבי האפשרי של קבוצות בחלוקה כזאת?

תשובה. 2886

פתרון. אי-אפשר לפצל משקולת, ויש משקולת של 5771 גרמים, לכן המשקל של קבוצה אחת הוא לפחות 5771 גרמים.
להלן דוגמה של חלוקה שבה כל קבוצה היא בדיוק במשקל זה: קבוצה אחת מורכבת רק מהמשקולת שמשקלה 5771, והקבוצות האחרות הן זוגות משקולות: 5770 עם 1, 5769 עם 2, ... וכו' (זה מסתדר כי 5770 הוא מספר זוגי).
בדוגמה הזו, משקל כל קבוצה הוא הכי קטן שאפשר, ולכן כמות הקבוצות היא הכי גדולה שאפשר (שכן משקל הקבוצות כפול מספר הקבוצות שווה למשקל הכולל של המשקולות).
כמות הקבוצות בחלוקה: קבוצה אחת של משקולת אחת ועוד זוגות שנבנו מ-5770 משקולות, כלומר $1+\frac{5770}{2}=1+2885=2886$.

הערה. אפשר להוכיח מינימליות גם אחרת: בכל דוגמה עם יותר קבוצות תהיינה לפחות 2 קבוצות שבהן יש משקולת אחת בלבד, וברור שמשקל קבוצות אלה לא יהיה זהה.

2. חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי:
$$\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{1\cdot 3}}+\sqrt{2-\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3\cdot 5}}+\sqrt{3-\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5\cdot 7}}+\ldots+\sqrt{40-\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{79\cdot 81}}.$$

תשובה. 4

פתרון.
$$2\left(\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{1\cdot 3}}+\sqrt{2-\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3\cdot 5}}+\sqrt{3-\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5\cdot 7}}+\ldots+\sqrt{40-\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{79\cdot 81}}\right)=$$
$$=\sqrt{4-2\sqrt{1\cdot 3}}+\sqrt{8-2\sqrt{3\cdot 5}}+\sqrt{12-2\sqrt{5\cdot 7}}+\ldots+\sqrt{160-2\sqrt{79\cdot 81}}=$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{1}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2}+\ldots+\sqrt{\left(\sqrt{81}-\sqrt{79}\right)^2}=$$
$$=\left(\sqrt{3}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)+\ldots+\left(\sqrt{81}-\sqrt{79}\right)=\sqrt{81}-1=8$$
לכן התשובה היא 8 חלקי 2.

3. בממשלה של מדינה זרה 12 שרים. לכל שר יש 5 חברים ו-6 אויבים בממשלה. כל 3 שרים מרכיבים ועדה. ועדה נקראת מתוקנת אם כל חבריה חברים או שכל חבריה אויבים. כמה ועדות מתוקנות יש?

תשובה: 40

פתרון ראשון. נניח שמספר הועדות המתוקנות הוא X.

מספר הועדות הכולל הוא $220=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=\binom{12}{3}$.

לכן מספר הועדות הלא מתוקנות הוא $220-X$.

נתבונן במבנים מהסוג הבא: שר מסוים וזוג חברים שלו, או שר מסוים וזוג אויבים שלו.

מספר של מבנים כאלה יסומן ב-V. אנחנו נספור את V בשתי דרכים:

א. בכל ועדה מתוקנת יש שלושה כאלה, ובכל ועדה לא מתוקנת יש אחד. לכן

$$V=3X+(220-X)=220-2X$$

ב. לכל שר יש $\frac{5\cdot 4}{2}=\binom{5}{2}$ זוגות חברים, ויש לו גם $\frac{6\cdot 5}{2}=\binom{6}{2}$ זוגות אויבים, לכן כל אחד מבין 12 השרים יוצר $5\cdot 5=5\cdot\frac{4+6}{2}=\frac{5\cdot 4}{2}+\frac{6\cdot 5}{2}$ מבנים כאלה, לכן $V=12\cdot 5\cdot 5=300$.

נשווה את התוצאות של שני החישובים הללו ונקבל $220-2X=300$. מכאן מקבלים את X.

פתרון שני. נסתכל במבנים מהסוג הבא: שר מסוים, חבר שלו, ואויב שלו. נסמן מספר של מבנים כאלה W. לכל אחד מבין 12 השרים יש 5 חברים ו-6 אויבים, לכן

$$W=12\cdot 5\cdot 6=60\cdot 6=360.$$

מצד שני, בועדה מתוקנת אין מבנים כאלה, ובועדה לא מתוקנת יש שני מבנים כאלה, ולכן כמות הועדות הלא מתוקנות היא $180=\frac{W}{2}$.

היות וכמות הועדות הכוללת היא $220=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=\binom{12}{3}$, ומתוכן 180 ועדות אינן מתוקנות, נשארות 40 ועדות מתוקנות.

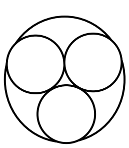
הערות. א. ניתן לנחש את התשובה לשאלה מבלי לפתור אותה: ניקח לדוגמה ממשלה שבה יש שתי מפלגות של 6 שרים, כאשר כל השרים בתוך מפלגה חברים אלה של אלה, ואויבים לשרי המפלגה השנייה. קל לספור שכל מפלגה יוצרת 20 ועדות מתוקנות, ואין ועדות מתוקנות שמערבבות בין המפלגות.

דוגמה אחרת, שגם בה קל לספור את הועדות המתוקנות, היא כאשר השרים יושבים מסביב לשולחן עגול, וכל שר אויב של 6 השרים שקרובים אליו (3 מימינו ו-3 משמאלו).

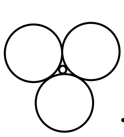
כמובן, ספירה בדוגמה מסוימת לא מהווה פתרון מלא, כי ייתכן שלשאלה יהיו מספר תשובות: למשל אם בדוגמה אחת יש 40 ועדות מתוקנות, ובדוגמה אחרת 41. לכן מי שבדק רק דוגמה אחת קיבל רק נקודה אחת מתוך 10.
אפשר להשלים בדיקת דוגמה להוכחה, אם מוכיחים שכל הדוגמות נותנות אותו מספר של ועדות מתוקנות, והיו תלמידים שעשו זאת, אבל זה פתרון ארוך יותר מספירה כפולה.
ב. ברמת העיקרון כדאי להביא דוגמה בכל מקרה, כי ייתכן שהמצב לא אפשרי והתשובה לשאלה היא קבוצה ריקה. אפשר להגיד שבעצם בשאלה נתון שדוגמה קיימת, כי מדובר על ממשלה של מדינה ומהנתון משתמע שהיא קיימת. לכן החלטת הבודקים בתחרות הזאת הייתה לא להוריד נקודות על חוסר דוגמה, אבל בתחרויות אחרות עלולים להוריד על זה נקודה או שתיים.

4. נתונים שלושה מעגלים שונים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ שמשיקים זה לזה ושווים בגודלם. מעגל נוסף β משיק לשלושתם בנקודות A_1, A_2, A_3 בהתאמה. תהי P נקודה על β שלא מתלכדת עם A_3, A_2, A_1. עבור $i = 1,2,3$ נסמן ב-B_i את נקודת החיתוך השנייה של הישר PA_i עם המעגל α_i. הוכח כי המשולש $B_1B_2B_3$ הוא שווה צלעות.

פתרון ראשון. את השאלה הזאת קל לבנות באמצעות העתקת הומותטיה (מתיחה אחידה). ניקח נקודה O במישור ונגיד שהיא ראשית הצירים. אז יש התאמה טבעית בין נקודות המישור לווקטורים: נקודה P מיוצגת על ידי ווקטור OP. העתקת הומותטיה בעלת מרכז O ומקדם a פשוט מכפילה כל ווקטור ב-a.
למשל: אם המקדם הוא 0.5 אז נקודה P מועתקת לאמצע הקטע OP. אם המקדם הוא 2 אז ההעתקה מרחיקה נקודה מ-O פי 2. אם המקדם הוא 1-, מקבלים העתקת סיבוב ב-180º.
קל להבין שהעתקת הומותטיה שומרת על דמיון צורות וכיוונים של הישרים. למשל, מעגל יעבור למעגל, ומעגל שעובר דרך מרכז ההומותטיה O יעבור למעגל אחר שגם עובר דרך O, ומשיק למעגל המקורי. גם ההפך נכון: אם שני מעגלים משיקים ב-O, אז קיימת הומותטיה עם מרכז ב-O שמעבירה את המעגל הראשון למעגל השני. אם המעגלים משיקים באופן חיצוני, המקדם יהיה שלילי, ואם הם משיקים באופן פנימי (אחד מכיל את השני) המקדם יהיה חיובי.



קוראים ללא היכרות קודמת עם הומותטיה מוזמנים להוכיח את התכונות הנ"ל בתור תרגיל, ומומלץ בחום לצייר את הציור.
נעבור לפיתרון עצמו. ובכן, קיימת הומותטיה עם מקדם k ומרכז ב-A_i שתעביר מעגל β למעגל α_i, עבור $i = 1,2,3$. לשלוש ההעתקות יהיו מרכזים שונים, אבל אותו מקדם (k יהיה חיובי אם β מכיל את שלושת המעגלים האחרים ומשיק להם באופן פנימי, ושלילי אם הוא משיק להם באופן חיצוני, אבל בכל מקרה זה יהיה אותו מספר לשלוש ההעתקות). ברור גם שהעתקה מספר i תעביר את P ל-B_i.



מכאן מקבלים זהות ווקטורית $k \cdot A_iP = A_iB_i$.
מכאן בחשבון ווקטורי פשוט מקבלים: $k\cdot(P-A_i)=B_i-A_i$, ומהעברת אגפים נקבל $k\cdot P-(k-1)\cdot A_i=B_i$, וכן $(k-1)(P-A_i)=B_i-P$, כלומר $(1-k)PA_i=PB_i$. במילים

אחרות, הומותטיה עם מקדם $1-k$ ומרכז ב-P מעבירה את המשולש $A_1A_2A_3$ למשולש $B_1B_2B_3$. המשולש הראשון שווה צלעות (בגלל הסימטריה הסיבובית של התמונה) לכן גם המשולש השני שווה צלעות (שכן הומותטיה מעבירה כל משולש למשולש שדומה לו).

פתרון שני. נסמן ב-O את מרכז המעגל β, ונסמן ב-O_i את מרכז המעגל α_i. משולשים A_iPO, $A_iB_iO_i$ דומים: שניהם שווי-שוקיים, והזוויות ב-A_i שוות. מכאן קל להבין שהקטע PO, מקביל לקטע B_iO_i, ושהם מסתכלים באותו כיוון אם β משיק ל- α_i מבפנים, ומסתכלים בכיוונים שונים אם β משיק ל- α_i מבחוץ. לכן רואים שאפשר לקבל את המשולש $B_1B_2B_3$ על ידי הזזה של המשולש $O_1O_2O_3$ בכיוון מסוים (במקביל ל-PO), במרחק ששווה לרדיוס המעגל. אבל $O_1O_2O_3$ - משולש שווה צלעות, כי יש לתמונה סימטריה סיבובית. לכן גם $B_1B_2B_3$ - משולש שווה צלעות.

5. נתונות שתי רשימות של מספרים: האחת 1, 6, 11, ..., 96 והשנייה 4, 9, 14, ..., 99.
בכל תור מוחקים שני מספרים מאחת הרשימות ורושמים את שליש הסכום שלהם (שאינו בהכרח שלם) ברשימה השנייה. ממשיכים בתהליך כל עוד אפשר.
א. הוכח שבסוף התהליך יישאר בדיוק מספר אחד בכל אחת מהרשימות.
ב. הוכח ששני המספרים האלה שונים.

פתרון. א. בסוף התהליך, בכל רשימה יהיו פחות משני מספרים – אחרת נוכל להמשיך. לא ייתכן ששתי הרשימות יהיו ריקות – כי בכל מהלך נוצר מספר חדש. לכן המצב הסופי הוא שבשתי הרשימות יש מספר אחד, או שבאחת מהרשימות מספר אחד והשנייה ריקה.
נסמן ב-X את כמות המספרים ברשימה אחת, וב-Y את הכמות ברשימה השנייה. בכל מהלך, מוחקים שני מספרים מרשימה מסוימת ומוסיפים מספר באחרת - לכן $X-Y$ עולה או יורד ב-3. בתחילת התהליך $X=Y$ ולכן $X-Y=0$, ומכאן שבכל שלב $X-Y$ יתחלק ב-3.
לכן מבין שלוש האפשרויות עבור סיום המשחק, שבהן $X-Y$ הוא $1-1$, או $1-0$, או $0-1$, רק האפשרות הראשונה ($1-1$) מתאימה.

ב. יהיו שני מספרים רציונליים, $\frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2}$, עבורם n_1,n_2 לא מתחלקים ב-5. נרשום $\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}\pmod 5$ ונגיד ש- $\frac{m_1}{n_1}$ שווה ל- $\frac{m_2}{n_2}$ מודולו 5, אם $m_1n_2-m_2n_1$ מתחלק ב-5 (הביטוי $m_1n_2-m_2n_1$ הוא המונה של השבר $\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_2}{n_2}$).

תרגילים (עבור תלמידים ללא היכרות קודמת עם חשבון מודולרי):
(1) וודא שהיות מספרים רציונליים x, y שווים מודולו 5 לא תלוי בייצוג שלהם כשברים.
(2) וודא שאם $x=y\pmod 5$ וכן $y=z\pmod 5$ אז גם $x=z\pmod 5$.
(3) וודא שאם $x=z\pmod 5$ וגם $y=w\pmod 5$ אז גם $x+y=z+w\pmod 5$.

(4) וודא שאם $x=z\pmod 5$ וגם $0\neq y=w\pmod 5$ אז גם $\frac{x}{y}=\frac{z}{w}\pmod 5$.

טענה: המספרים ברשימה הראשונה תמיד שווים ל-1 מודולו 5, והמספרים ברשימה השנייה תמיד שווים ל--1.

מהטענה נובע שבסוף, כשיהיה מספר אחד בכל רשימה, המספרים האלה יהיו שונים מודולו 5 ולכן הם יהיו שונים. נשאר להוכיח את הטענה.

הוכחת הטענה. נראה זאת באינדוקציה על צעדי התהליך:

בתחילת התהליך זה אכן מתקיים, שכן כל המספרים ברשימה הראשונה הם מהצורה $5n+1$, וברשימה השנייה הם מהצורה $5n-1$. נניח שהטענה התקיימה לאורך התהליך בינתיים, ונתבונן בצעד הבא:

אם ניקח x, y מהרשימה הראשונה (ששווים 1 מודולו 5), אז $\frac{x+y}{3}=\frac{1+1}{-2}=-1\pmod 5$.

אם ניקח x, y מהרשימה השנייה (ששווים -1 מודולו 5), אז $\frac{x+y}{3}=\frac{-1-1}{-2}=1\pmod 5$.

לכן בכל מקרה, המספר החדש שמוסיפים גם יקיים את הטענה. מש"ל.

6. נתונים N כרטיסים אדומים ו-N כרטיסים כחולים, שעל כל אחד מהם רשום מספר טבעי בין 1 ל-N (יתכן שמספר מסוים מופיע יותר מפעם אחת, ויתכן שמספר מסוים לא מופיע כלל). הוכח כי ניתן לבחור מספר כרטיסים אדומים (יותר מ-0) ומספר כרטיסים כחולים, כך שסכום המספרים על הכרטיסים האדומים שנבחרו שווה לסכום המספרים על הכרטיסים הכחולים.

פתרון. ניתן להניח, בלי הגבלת הכלליות, שסכום כל הכרטיסים האדומים גדול או שווה לסכום כל הכחולים.

נתחיל לסדר את הכרטיסים בשורה, ובמקביל לרשום רשימה של מספרים, באופן הבא: בהתחלה נרשום 0. לאחר מכן, בכל פעם שהמספר האחרון שנרשם אינו חיובי, ניקח כרטיס אדום כלשהו שטרם נוצל ונשים אותו בסוף השורה, ואילו אם המספר האחרון שנרשם כן חיובי, ניקח כרטיס כחול כלשהו שטרם נוצל ונשים אותו בסוף השורה. אחרי הוספת כרטיס חדש, נוסיף למספר האחרון שנרשם את המספר של הכרטיס החדש אם הוא היה אדום, או נחסיר מהמספר האחרון את המספר של הכרטיס החדש אם הוא היה כחול - ובכל מקרה נרשום את המספר המתקבל בסוף הרשימה. קל לראות שבכל שלב, המספר הזה מייצג את סכום המספרים האדומים פחות סכום המספרים הכחולים שנמצאים בשורה ברגע שהוא נרשם.

התהליך מסתיים כאשר לא ניתן להמשיכו עוד. כלומר כאשר המספר האחרון חיובי ונגמרו הכרטיסים הכחולים, או כאשר המספר האחרון אינו חיובי ונגמרו הכרטיסים האדומים. קל לראות שבכל מקרה הכרטיסים הכחולים יגמרו – סכום הכחולים אינו עולה על סכום

האדומים, ולכן אם אזלו כל הכרטיסים האדומים והסכום אינו חיובי, בהכרח ניצלנו גם את כל הכרטיסים הכחולים. בנוסף רואים שהמספר האחרון בהכרח אי-שלילי.
נתבונן במספרים האי-שליליים שנרשמו ברשימה. מספרים אלה נמצאים בין 0 ל-N. אכן, נניח אחרת: נסתכל על המספר הראשון ברשימה שגדול ממש מ-N. אזי המספר שנרשם לפניו גם חיובי, לכן בשלב הקודם היינו אמורים להוסיף לשורה כרטיס כחול והוספנו אדום.
ובכן יש N+1 אפשרויות עבור מספרים אי-שליליים ברשימה (מ-1 עד N). יחד עם זאת ברשימה יש לפחות N+2 מספרים אי-שליליים: בהתחלה יש 0, בסוף מספר אי-שלילי, וגם לפני כל פעם שהוספנו לשורה כרטיס כחול היה מספר חיובי, והרי הוספנו את כל N הכרטיסים הכחולים.
לכן לפי עקרון שובך היונים קיים מספר אי-שלילי מסוים X שמופיע ברשימה לפחות פעמיים. ניקח את הכרטיסים שנוספו לשורה בין הפעם ש-X נרשם לראשונה והפעם השנייה ש-X נרשם. בקבוצת הכרטיסים האלה סכום הכרטיסים האדומים שווה לסכום של הכרטיסים הכחולים! מש"ל.

הערה. אפשר לנסח את אותה השאלה (ואותו הפתרון) עבור מצב כללי יותר: כאשר יש K כרטיסים אדומים עם מספרים מ-1 עד M, ו-M כרטיסים כחולים שמספריהם מ-1 עד K.