

תחרות גיליס - תשנ"ט (1999)

1. ידוע שמצולע קמור  $M$  לא מכיל אף משולש ששטחו גדול מ-1. הוכח שאפשר להכיל את המצולע במשולש ששטחו לא גדול מ-4.
2. רב-איבר  $P(x) = ax^3 + \dots$  ממעלה 3 מקיים את התנאי  $|P(x)| < 1$  עבור כל  $x$  בקטע  $[-1, 1]$ . הוכח ש- $|a| < 30$ . האם תמיד נכון ש- $|a| < 9/2$ ?
3. 1999 ז'וקים נמצאים במשבצות על הלוח  $2000 \times 2000$  כך שלאף אחד מהם אין שכנים (במשבצות שיש להן צלע משותף). הוכח שאחד מהז'וקים יכול לעבוד למשבצת שכנה כך שגם במקום החדש לא יהיו לו שכנים.
4. רב-איבר  $P$  עם מקדמים שלמים בקבל את הערכים  $P(a) = 1$ ,  $P(b) = 2$ ,  $P(c) = 3$  בשלשה ערכים שלמים  $a, b, c$ . הוכח ש- $b$  נמצא בין  $a$  לבין  $c$ .
5. נתונים  $n$  וקטורים באורך יחידה במישור שסכומם אפס. הוכח שאפשר לסדר אותם כך שארך סכום של כל  $k$  הראשונים לא יהי גדול מ-2 עבור כל  $k$  בין 2 ל- $(n-1)$ ?