

אולימפיאדה במתמטיקה ע"ש יוסף גיליס - 2000

1. הוכח שלמספר $2^{2^n} - 1$ עבור כל n טבעי יש לפחות n גורמים ראשוניים שונים.
2. כמה נקודות ניתן להכניס לתוך עיגול שראדיוסו 1 כך שהמרחק בין כל שתיים מהן יהיה גדול מ- $\sqrt{2}$?
3. מערכת של $2m \times 2n$ נקודות צבועות בכחול ובאדום מסודרות ברשת מלבנית כך שבכול שורה יש m נקודות כחולות ו- m נקודות אדומות, ובכול טור יש n נקודות כחולות ו- n נקודות אדומות. כל קטע המחבר זוג נקודות סמוכות (באותה שורה או אותו טור) בעלות צבע זהה, צבוע בצבע זהה. הוכח שמספר הקטעים הכחולים שווה למספר הקטעים האדומים.
4. מרובע קמור חסום במעגל. מנקודת המפגש של אלכסוני המרובע מורידים ניצבים לכל הצלעות. הוכח כי עקבי הניצבים יוצרים מרובע החוסם מעגל.
5. הוכח כי עבור כל $n \geq 0$ שלם אין פתרונות ממשיים למשוואה

$$\frac{x^{2000}}{2001^n} + \frac{x^{1999}}{2000^n} + \dots + \frac{x^2}{3^n} + \frac{x}{2^n} + 1 = 0$$