

אולימפיאדה מתמטית ע"ש יוסף גיליס

23 בינואר 2003

1. בשנה אזורחית מסוימת היה אותו מספר של ימי ראשון וימי שלישי. האם מספר ימי שני באותה השנה חייב להיות שווה למספר הזה?
2. בחצר של בית ספר התקוטטו תלמידים: כל אחד נתן מכה אחת לאחד מחבריו. הוכח כי המנהל יכול לחלק את התלמידים לשלוש כיתות כך שבשום כיתה לא יימצא זוג תלמידים שאחד מהם קיבל מכה מהשני.
3. נקודה P בתוך המקבילית ABCD מקיימת את התנאי שהזוויות ABP ו-ADP שוות. הוכח כי הזוויות BAP ו-BCP גם הן שוות זו לזו.
4. המורה ביקש להציג את המספר 987654321 כסכום של שני מספרים טבעיים כך שגם בכל אחד מהם מופיעות כל הספרות מ-1 ועד 9. אלכס החרוץ מצא 396 פתרונות שונים ($A+B$ ו- $B+A$ נחשב כפתרון אחד) וטוען שאין פתרונות נוספים. הוכח כי הוא טעה.
5. (א) מצא פונקציה $f(x)$ ותחום הגדרה שלה כך שהתנאי $f(f(x))=x^2-2$ מתקיים על הקטע $[1\frac{1}{2}, 2]$.
(ב) הוכח כי זה בלתי אפשרי אם דורשים שהתנאי מתקיים על הקטע $[-2, 2]$.