

אולימפיאדה במתמטיקה ע"ש גיליס 2007

1. האם כל מספר שסכום ספרותיו 2007 מתחלק ב-2007?

2. מצא את כל הערכים האפשריים של הביטוי:

$$\arccos \frac{a}{\sqrt{a+b}\sqrt{a+c}} + \arccos \frac{b}{\sqrt{b+a}\sqrt{b+c}} + \arccos \frac{c}{\sqrt{c+a}\sqrt{c+b}}$$

עבור $a, b, c > 0$.

3. על מעטפת כדור ישנן 5 נקודות A, B, C, D, E היא נקודת החיתוך של הקטעים AB ו- CD . נתון ש $|AE|=|CE|=|FE|$. הוכח שהקטעים BD ו- EF ניצבים.

4. ג'ק מנהיג כנופיה של 40 שוודים. ג'ק משלם להם את שכרם באופן הבא: הם נעמדים במעגל, וכל שווד מקבל דינרים בסכום השווה להפרש הגבהים שבין שני השוודים שמצידי. הגבהים של חברי הכנופיה הוא כדלקמן: 151, 152, 153, ..., 190. איך תסדר את 40 השוודים במעגל כדי שסכום השקלים שכל 40 השוודים יקבלו יחדיו יהיה מקסימאלי. (תן דוגמא למעגל שכזה).

5. A היא קבוצה בת 60 נקודות במישור. B היא קבוצת כל המספרים המיצגים מרחקים של שתי נקודות שונות ב- A . הראה שמספר האיברים של B יכול להיות:

(א) פחות מ-50.

(ב*) פחות מ-25.

6. האישה הירוקה נוסע כל יום מביתו לעבודתו. הוא אינו פוגש אנשים ומכוניות בדרכו ולכן הוא נוסע תמיד במהירות 70 קמ"ש ועוצר רק כאשר נתקל ברמזור אדום. הוא יודע שכל רמזור מתזמן להיות אדום וירוק (אין כתום) במשך אותו מספר דקות (מספר הדקות ברמזור אחד יכול להיות שונה ממספר הדקות ברמזור אחר אך בכל רמזור מספר הדקות שהצבע אדום שווה למספר הדקות שהצבע ירוק). האישה הירוקה תמיד עוצר ברמזורים אדומים ולעולם אינו עוצר ברמזורים ירוקים. אי לכך, משך זמן הנסיעה תלוי אך ורק בזמן עזיבת האישה הירוקה את ביתו. האישה הירוקה יודע כי משך זמן הנסיעה יכול להיות 30 דקות וגם 32 דקות. האם לכל מספר רמזורים אשר לכל אחד מהם מחזוריות קבועה ניתן למצוא זמן שבו יעזוב האישה הירוקה את ביתו ויגיע לעבודתו ב-31 דקות בדיק?