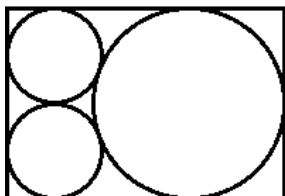


# האולימפיאדה הארצית במתמטיקה על שם פרופ' גיליס

## תשע"ב

יש להוכיח כל טענה ולנמק כל תשובה. לא תינתנה נקודות לתשובה נכונה ללא פתרון מלא.



1. המעגלים בציור משיקים זה לזה ולצלעות של המלבן. רדיוס המעגל הגדול שווה ל-1. חשבאי את שטח המלבן.

2. הצבא של מדינה זרה מבצע שמירה מסביב לשעון על אובייקט סודי. השמירה מתבצעת על ידי 7 שומרים. לכל שומר יש תורנות שמירה של 7 שעות רצופות בכל יום, בשעות קבועות. הוכח שאפשר להוציא את אחד השומרים מסבב השמירות, כך שעדיין תהיה שמירה מסביב לשעון על האובייקט הסודי, מבלי שיהיה צורך לשנות את השמירה של אף שומר אחר.

3. נתון:  $a^3(b+c) + b^3(a+c) + c^3(a+b) = 0$ . הוכחאי כי  $ab + bc + ca \leq 0$ .

4. נתון לוח משבצות  $7 \times 7$ . בכל משבצת מסמנים את אחד האלכסונים וצובעים את אחד המשולשים שנוצרים בשחור. מה השטח הגדול ביותר שיכול לתפוס גוש שחור רציף (רציף פירושו מחובר בצלעות)?

5. מצא את כל הפתרונות השלמים של המשוואה  $a^3 + 3ab^2 + 7b^3 = 2011$ .

6. במישור נתונות נקודות  $O, A, B, C$  כך שהזוויות  $AOB, BOC, COA$  קהות. על  $OA, OB, OC$  נבחרו נקודות  $X, Y, Z$  בהתאמה כך ש-  $OX = OY = OZ$ . על הקטעים  $OX, OY, OZ$  נבחרו נקודות  $K, L, M$  בהתאמה. הקווים  $AL$  ו-  $BK$  נחתכים בנקודה  $R$  שלא נמצאת על  $XY$ . הקטע  $XY$  חותך את  $BK$  ואת  $AL$  בנקודות  $R_1, R_2$ . הקווים  $CL$  ו-  $BM$  נחתכים בנקודה  $P$  שלא נמצאת על  $YZ$ . הקטע  $YZ$  חותך את  $BM$  ואת  $CL$  בנקודות  $P_1, P_2$ . הקווים  $CK$  ו-  $AM$  נחתכים בנקודה  $Q$  שלא נמצאת על  $XZ$ . הקטע  $XZ$  חותך את  $AM$  ואת  $CK$  בנקודות  $Q_1, Q_2$ . הוכח שאם  $PP_1 = PP_2$  ובנוסף  $QQ_1 = QQ_2$  אז גם  $RR_1 = RR_2$ .

**בהצלחה!**