



29.11.2018

האולימפיאדה הארצית על שם פרופ' גיליס, תשע"ט

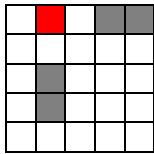
1. בגן ילדים מתקיימים שלושה חוגים: ג'ודו, חקלאות ומתמטיקה. כל ילד משתתף בחוג אחד בדיוק ובכל חוג יש לפחות משתתף אחד.

מספר הילדים בגן הוא 32.

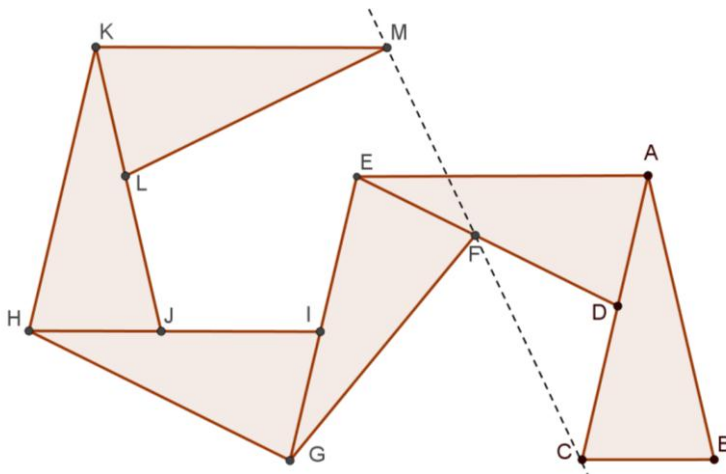
ביום שישי הגננת אספה 6 ילדים שיסדרו את הכיתה. הגננת ספרה וגילתה כי בדיוק חצי מתלמידי החוג לג'ודו, רבע מתלמידי החוג לחקלאות ושמינית מתלמידי החוג למתמטיקה נרתמו למשימה.

כמה תלמידים יש בכל חוג?

2. נתון לוח משבצות 5×5 המחולק למשבצות 1×1 . שתי משבצות נקראות קשורות אם הן נמצאות באותה שורה או באותה עמודה, והמרחק בין מרכזי המשבצות הוא 2 או 3. לדוגמה, בציור מסומנות בצבע אפור כל המשבצות הקשורות למשבצת האדומה.



סמי מקבל לוח לבן, ורוצה לסמן עליו כמה שיותר משבצות שאף שתיים מהן אינן קשורות זו לזו. מהי הכמות המרבית של משבצות שהוא יכול לסמן?



3. שישה משולשים שווי שוקיים חופפים הוצמדו זה לזה כמתואר בציור. הראו כי הנקודות F, C ו-M נמצאות על ישר אחד.

4. המספר 1 רשום על הלוח 9999 פעמים. מותר לנו לבצע את הפעולות הבאות:

- למחוק מהלוח ארבעה מספרים מהצורה x, x, y, y ולרשום על הלוח את המספרים $x + y, x - y$. אין חשיבות למיקום המספרים שנמחקו או שנכתבו.

• למחוק מהלוח את המספר 0 בכל מקום שבו הוא רשום.

האם ייתכן שנגיע למצב שבו:

א. רק מספר אחד רשום על הלוח?

ב. לכל היותר שלושה מספרים רשומים על הלוח?

5. גיא קיבל 17 קלפים, שעל כל אחד מהם רשום מספר שלם. המספרים לא בהכרח חיוביים ולא בהכרח שונים זה מזה. גיא שם לב שלכל קלף, אם מעלים את המספר הרשום עליו בריבוע, מקבלים את סכום המספרים הרשומים על הקלפים האחרים.

מה האפשרויות לקלפים שקיבל גיא? (כלומר: לכל אפשרות, אילו מספרים מופיעים וכמה פעמים מופיע כל מספר.)

6. קבוצת מספרים שלמים נקראת אגדית, אם ניתן להגיע ממנה לכל מספר שלם בעזרת כמות כלשהי של פעולות מהסוג הבא:

אם המספרים x, y נמצאים בקבוצה, ניתן להוסיף לה את המספר $xy - y^2 - y + x$.

הוכיחו שכל קבוצה אגדית מכילה לפחות 8 מספרים.

7. במישור סומנו שלוש נקודות כחולות: A, B ו-C, ושתי נקודות אדומות: P ו-Q (אף 3 מהנקודות המסומנות אינן על ישר אחד, ואף 4 אינן על מעגל אחד). מעגל נקרא **מפריד** אם כל הנקודות מצבע אחד נמצאות בתוכו וכל הנקודות מהצבע האחר נמצאות מחוץ אליו. עבור המעגל החוסם של המשולש ABC, נסמן ב-O את מרכזו, וב-R את הרדיוס שלו. הראו כי מעגל מפריד קיים אם ורק אם לכל נקודה X בקטע PQ שנמצאת גם בתוך המשולש ABC, מתקיים $PX \cdot XQ \neq R^2 - OX^2$.

בהצלחה!