<u>משפט:</u> נתונה סדרה $\{a_n\}$ כך ש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ הוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n} = a$$

<u>הערה:</u> הכיוון השני איננו נכון.
<u>הוכחה:</u> ראשית נוכיח עבור $a = 0$. בהינתן $\epsilon > 0$ צ"ל כי קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים:

$$\frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right|}{n} \leq \epsilon$$

לפי הנתון קיים N_1 כך שלכל $k \geq N_1$ מתקיים $|a_k| < \frac{\epsilon}{2}$. $\{a_n\}$ סדרה מתכנסת ולכן חסומה, כלומר קיים M כך ש $|a_n| < M$ לכל n. בנוסף קיים N_2 כך שלכל $n \geq N_2$ מתקיים $\frac{\epsilon}{2} < \frac{M \cdot N_1}{n}$. אם נבחר $N = \max\{N_1, N_2\}$ נקבל כי עבור $n \geq N$ מתקיים:

$$\begin{array}{lll}
\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = & \sum_{k=1}^{N_1-1} a_k + \sum_{k=N_1}^{n} a_k & \\
& \Downarrow & \Rightarrow \\
\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leq & \left|\sum_{k=1}^{N_1-1} a_k\right| + \left|\sum_{k=N_1}^{n} a_k\right| < & M\left(N_1 - 1\right) + \dfrac{\epsilon}{2}\cdot\left(n - N_1\right) \\
& \Downarrow & \\
\dfrac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right|}{n} \leq & \frac{M(N_1-1)}{n} + \frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{(n-N_1)}{n} & \leq \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{array}$$

כלומר קיבלנו את הדרוש.

מקרה כללי: נניח כי $a_n \to a$. נרשום $b_n = a_n - a$, כלומר $b_n \to 0$. לכן לפי החלק הקודם:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k}{n} \to 0$$

מצד שני:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k}{n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_n - a\right)}{n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_n - n\cdot a}{n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_n}{n} - a$$

כלומר

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_n}{n} - a \to 0 \Rightarrow \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_n}{n} \to a$$