

חדו"א 3 - תרגיל מס' 0

1. מצאו את הפנים, הסגור והשפה של $A \subset \mathbb{R}^2$ הנתונה. האם A פתוחה? סגורה?

(א) $A = \{(x, y) : x^2 \leq y\}$

(ב) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

(ג) $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x, y \text{ רציונליים}\}$

(ד) $A = \{(t, \sin \frac{1}{t}) : t > 0\}$

2. תהי $A \subset \mathbb{R}^n$. הוכיחו כי

(א) $(\overline{A})^c = \text{Int}(A^c)$

(ב) $A = \text{Int} A$ אם ורק אם A פתוחה

(ג) \overline{A} היא קבוצה סגורה.

(ד) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$

3. האם הקבוצה הנתונה היא קומפקטית?

(א) $\{(x, y) : x^2 + y^3 \leq 10\} \subset \mathbb{R}^2$

(ב) $\{(x, y) : x^2 + y^4 \leq 10\} \subset \mathbb{R}^2$

(ג) $\{x^2 - 3y : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}$

4. תהי $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. נניח כי לכל $y \in \mathbb{R}$ הפונקציה $x \mapsto f(x, y)$ רציפה ב- \mathbb{R} , ולכל $x \in \mathbb{R}$ הפונקציה $y \mapsto f(x, y)$ רציפה ב- \mathbb{R} . האם נובע כי f רציפה ב- \mathbb{R}^2 ?

5. תהי $K \subset \mathbb{R}^n$ קומפקטית ו- $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו כי f רציפה במידה שווה ב- K , כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in K$, אם $|x - y| < \delta$ אז $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

6. תהי $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ רציפה. הוכיחו כי לכל קבוצה פתוחה V ב- \mathbb{R}^m , הקבוצה $U = f^{-1}(V)$ היא קבוצה פתוחה ב- \mathbb{R}^n .

7. תהי $A \subset \mathbb{R}^n$. נניח כי כל פונקציה רציפה $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ היא חסומה. האם נובע כי A קומפקטית?