סמסטר ב' 2013

## חדו"א 3 - תרגיל מס' 1

1. חקרו רציפות של כל אחת מהפונקציות הבאות $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

(א)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(ב)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

כאשר $a,b$ מספרים ממשיים.

2. האם $\mathbb{R}^n\setminus S^{n-1}$ קבוצה קשירה מסילתית ?

3. תהי $f:S^2\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הראו כי קיימת נקודה $x\in S^2$ כך ש- $f(x)=f(-x)$ ("בכל רגע קיימות על פני כדור הארץ שתי נקודות מנוגדות בהן הטמפרטורה זהה"). הראו כי למעשה יש אינסוף נקודות כאלו.

4. תהי $A\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה קשירה מסילתית, $f:A\to\mathbb{R}^m$ רציפה. הראו כי $f(A)$ קבוצה קשירה מסלתית.

5. תהי $A\subset\mathbb{R}^n$. עבור $x,y\in A$ נאמר כי $x\sim y$ אם קיימת מסילה $\gamma:[a,b]\to A$ כך ש- $\gamma(a)=x$ ו- $\gamma(b)=y$. הוכיחו כי זהו יחס שקילות על $A$ וכי כל מחלקת שקילות היא קבוצה קשירה מסילתית.

6. תהיינה $U,V\subset\mathbb{R}^n$ שתי קבוצות פתוחות וזרות. האם ייתכן כי $U\cup V$ קבוצה קשירה מסילתית ?

7. תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$. תהי $||\cdot||$ נורמה על $\mathbb{R}^n$.
הוכיחו כי קיים $C>0$ כך ש $||Ax||\leq C||x||$ לכל $x\in\mathbb{R}^n$. הסיקו שקיים $x_0$ עם $||x_0||=1$ כך ש

$$||Ax_0||=\max\{||Ax||\ :\ ||x||=1\}$$

8. (א) הראו שפונקציית הדטרמיננטה $\det:L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ הינה רציפה ביחס לנורמת $||\cdot||_{HS}$.
(ב) הראו שקבוצת ההעתקות הלינאריות ההפיכות, $GL_n$ היא קבוצה פתוחה ב $(L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n),||\cdot||_{HS})$.
(ג) תהיינה $a_{i,j}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(i,j=1,\ldots,n)$ פונקציות רציפות. נגדיר פונקציה $A:\mathbb{R}^n\to M_{n\times n}$ ע"י $(A(x))_{i,j}=a_{i,j}(x)$. נניח שקיימת נקודה $x_0\in\mathbb{R}^n$ עבורה $A(x_0)$ הפיכה. הראו שקיימת סביבה פתוחה של $x_0$ בה $A$ הפיכה.

9. * הראו כי פונקציה $f$ רציפה על קבוצה פתוחה $U$ אם ורק אם לכל מסילה רציפה $\gamma:[a,b]\to U$ מתקיים ש $f\circ\gamma$ רציפה.