חדו"א 3 - תרגיל בית 4

1. (א) מצאו את הנקודה הקרובה ביותר ואת הנקודה הרחוקה ביותר מראשית הצירים על המעגל המתקבל מחיתוך הכדור
$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$$
עם המישור $x-2z=0$.

(ב) מצאו את הנקודה הגבוהה ביותר ואת הנקודה הנמוכה ביותר של חלק המשטח $z=2xy-y^2$ הנמצא בתוך הגליל האליפטי $x^2+2y^2\leq 1$.

2. מצאו מקסימום ומינימום מוחלטים, עבור הפונקציות הבאות תחת האילוצים הנתונים:

(א) $f(x,y,z)=x^2+xy+y^2+z^2$ בכדור $x^2+y^2+z^2\leq 1$.

(ב) $f(x,y,z)=x^2-yz^2$ בתחום $\begin{cases} x^2+y^2\leq 2 \\ y+z=2 \end{cases}$.

3. מצאו מקסימום של הפונקציה $f(x,y,z)=x^a y^b z^c$ כאשר $a,b,c,x,y,z>0$, ומתקיים
$$x^k+y^k+z^k=1,\quad k>0$$

4. וקטור הסתברות הוא וקטור $p=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ כך שלכל $i\in\{1,\ldots,n\}$ מתקיים $0\leq p_i\leq 1$ ו $p_1+\ldots+p_n=1$. תהי $\{E_i\}_{i=1}^n$ סדרת מספרים. האנרגיה של p מוגדרת ע"י
$$E(p)=\sum_{i=1}^n p_i E_i$$
והאנטרופיה של p מוגדרת ע"י
$$H(p)=-\sum_{i=1}^n p_i\log p_i$$
מצאו את וקטור ההסתברות עבורו האנרגיה החופשית, המוגדרת ע"י $E(p)-H(p)$, היא מינימלית. מצאו את האנרגיה החופשית המינימלית.

5. נתון וקטור של מספרים אי־שליליים $H=(H_j)_{j=1}^n$. נתבונן במטריצות $A=(A_{ij})_{n\times n}$ המקיימות
$$\sum_{i=1}^n A_{ij}^2=H_j,\quad \forall j\in\{1,\ldots,n\}$$

(א) הוכיחו כי ל $(\det A)^2$ יכולה להיות נקודת אקסטרמום תחת התנאים הנ"ל רק אם השורות של המטריצה A הן וקטורים אורתוגונליים בזוגות ב $\mathbb{R}^n$.
רמז: היעזרו בפיתוח של $\det A$ לפי שורה.

(ב) בעזרת השיוויון $(\det A)^2=\det A\cdot\det A^T$, הוכיחו כי תחת התנאים הנ"ל
$$\max_A(\det A)^2=H_1\cdot\ldots\cdot H_n.$$

(ג) הסיקו את אי־שיוויון Hadamard לכל מטריצה $B=(B_{ij})_{n\times n}$:
$$(\det B)^2\leq\prod_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n(B_{ij})^2\right)$$

(ד) הסבירו את המשמעות הגיאומטרית של אי־שיוויון Hadamard.