חדו"א 3 - תרגיל בית 9

1. חשבו את מסת הגוף הנתון ב $\mathbb{R}^3$ ביחס לפונקציית הצפיפות הנתונה.
   (א) הכדור $x^2+y^2+z^2\leq R^2$ עם צפיפות $\rho(x,y,z)=x^2y^2z^2$.
   (ב) האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$ עם צפיפות $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.
2. חשבו את מרכז המסה (ביחס לצפיפות אחידה) של הגופים הבאים ב $\mathbb{R}^3$:
   (א) החרוט בגובה h: $x^2+y^2\leq z\leq h$
   (ב) הפירמידה הכלואה בין המישורים $x=0,\ y=0,\ z=0$ ו $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.
   (ג) שמינית האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$ כך ש $x,y,z\geq 0$.
3. הוכיחו כי מרכז המסה (ביחס לצפיפות אחידה) של משולש עם קודקודים בנקודות $A,B,C\in\mathbb{R}^2$ הוא הנקודה $\frac{1}{3}(A+B+C)$.
4. חשבו את האינטגרלים הבאים:
   (א) $\iiint_{\{x^2+y^2+z^2\leq 1\}}\frac{dxdydz}{x^2+y^2+(z-2)^2}$
   (ב) $\iiint_{\{x^2+y^2+z^2\leq 1\}}\frac{dxdydz}{x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$
   (ג) $\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   (ד) $\iint_{\mathbb{R}^2}|ax+by|\,e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\,dxdy$
   <u>רמז:</u> היעזרו בסיבוב כדי לעבור לקואורדינטות נוחות יותר.
5. האם האינטגרלים הבאים מתכנסים או מתבדרים ?
   (א) $\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{dxdy}{1+x^{10}y^{10}}$
   (ב) $\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-(x+y)^4}\,dxdy$
6. מצאו דוגמה לפונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ רציפה כך ש:

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{Q_n}f(x,y)\,dxdy\neq\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{B_n}f(x,y)\,dxdy$$

   כאשר $Q_n=[-n,n]\times[-n,n]$ ו $B_n=\left\{x^2+y^2\leq n^2\right\}$.
7. (אי־שיוויון Hölder) תהי $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ו p,q מספרים המקיימים $1<p,q<\infty$ ו $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. לכל זוג פונקציות $f\in L^p(\Omega)$ ו $g\in L^q(\Omega)$ מתקיים כי:

$$f\cdot g\in L^1(\Omega)\ \text{ and }\ \int\limits_{\Omega}|f\cdot g|\,dx\leq\left(\int\limits_{\Omega}|f|^p\,dx\right)^{1/p}\cdot\left(\int\limits_{\Omega}|g|^q\,dx\right)^{1/q}$$

<u>הערה:</u> $L^p(\Omega)$ - קבוצת כל הפונקציות f שהן אינטגרביליות רימן ב Ω ו $\int_\Omega|f|^p\,dx<\infty$ (עבור $1\leq p<\infty$).
<u>רמז:</u> <u>אפשרות 1:</u> ראשית הוכיחו את אי־השיוויון

$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\quad\forall a,b\in\mathbb{R}_+$$

<u>אפשרות 2:</u> היעזרו באי־שיוויון Hölder לסדרות.