חדו"א 1 - תרגיל בית מס' 10

1. חשבו את הנגזרות של הפונקציות הבאות (ציינו תחום הגדרה של הנגזרת):

(א) $\sin\left(e^x\right)$

(ב) $\log\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)$

(ג) $\left(\log x\right)^{\alpha}$

(ד) x^{x^x}

(ה) $\arctan\left(-\log^2 x\right)$

2. חשבו את הנגזרות של הפונקציות הבאות: (ציינו תחום הגדרה)

(א) $\sqrt{|x|}$ כאשר $x\in\mathbb{R}$

(ב) $\lfloor x^2\rfloor\sin^2\left(\pi x\right)$ כאשר $x\geq 0$

(ג) $\left\{x^2\right\}\sin^2\left(\pi x\right)$ כאשר $x\geq 0$ ($\{x\}$ מסמן את החלק השברי של x - כלומר $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$)

(ד) $\log|x|$ כאשר $x\neq 0$

(ה) $\arccos|x|$ כאשר $|x|<1$

3. נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| & ,\,x\neq 0\\ 0 & ,\,x=0\end{cases}$$

הראו כי $f\left(x\right)$ אינה גזירה בנקודות $x_n=\frac{2}{2n+1}$ לכל $n\in\mathbb{Z}$ וכי $f\left(x\right)$ גזירה בנקודה 0 (שהיא נקודת גבול של $\{x_n\}$).

4. נגדיר את הפונקציה הבאה: ($\alpha,\beta>0$)

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x^{\beta}\sin\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right) & ,\,x\neq 0\\ 0 & ,\,x=0\end{cases}$$

מצאו עבור אילו ערכים של α,β הפונקציה $f\left(x\right)$ רציפה/גזירה/גזירה ברציפות/גזירה פעמיים בנקודה 0.

5. הוכיחו את הטענות בסעיפים א' וב':

(א) תהי f פונקציה גזירה בנק' x, אזי מתקיים:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x)$$

(ב) ★ תהי f פונקציה גזירה פעמיים בנק' x, אזי מתקיים:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)$$

(ג) תנו דוגמא לפונקציה עבורה קיים הגבול בסעיף א' בנקודה מסוימת, אבל הפונקציה לא גזירה בנקודה.

6. תהי f פונקציה גזירה n פעמים בקטע (a,b). נתון כי קיימות נק' $x_0,x_1,\ldots,x_n\in(a,b)$ כך ש $f(x_0)=f(x_1)=\ldots=f(x_n)$. הוכיחו כי קיימת נק' $c\in(a,b)$ כך ש $f^{(n)}(c)=0$.

7. נתון כי $f''(x)=a\in\mathbb{R}$ לכל $x\in(y,z)$. הוכיחו כי קיימים מספרים $b,c\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x)=\frac{a}{2}\cdot x^2+bx+c$ לכל $x\in(y,z)$. הראו שהטענה איננה נכונה בהכרח אם ידוע כי $f''(x)=a$ בקבוצה שאיננה קטע.

8. הוכיחו את אי־השיוויונות הבאים:

(א) $\frac{1}{\cos^2\beta}<\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\cos^2\alpha}$ לכל $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$.

(ב) $x^\alpha-\alpha x\le 1-\alpha$ לכל $x\ge 0$ ו $0<\alpha<1$.

9. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) $(e^x\sin x)^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{4}\right)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ו $n\ge 1$

(ב) $(x^n\log x)^{(n)}=n!\left(\log x+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$ לכל $x>0$ ו $n\ge 1$

10. הוכיחו כי הפונקציות הבאות רציפות במ"ש בתחומים הנתונים:

(א) $f(x)=\arctan x$ בכל $\mathbb{R}$

(ב) $f(x)=\log\left(1+x^2\right)$ בתחום $[0,\infty)$

11. נתון כי $a_1,\ldots,a_n$ הם מספרים ממשיים שונים מ 0 וכי $b_1,\ldots,b_n$ הם מספרים ממשיים כך ש $b_j\ne b_k$ לכל $j\ne k$. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) למשוואה הבאה יש לכל היותר $n-1$ שורשים ב $(0,\infty)$:

$$a_1x^{b_1}+a_2x^{b_2}+\ldots+a_nx^{b_n}=0$$

(ב) למשוואה הבאה יש לכל היותר $n-1$ שורשים ב $\mathbb{R}$:

$$a_1e^{b_1x}+a_2e^{b_2x}+\ldots+a_ne^{b_nx}=0$$