חדו"א 3 - תרגיל בית 11

1. נסמן ב Σ^{n-1} את שטח הפנים של הסימפלקס ממימד n (לא כולל ה"צדדים"):

$$\Sigma^{n-1} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \,:\, x_i \geq 0, \sum_i x_i = 1 \right\}$$

הוכיחו כי $A_{n-1}\left(\Sigma^{n-1}\right) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}$ כאשר A_{n-1} מציין את שטח הפנים ממימד $n-1$.

2. הוכיחו/הפריכו: הפונקציה $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ דיפרנציאבילית אם"ם לכל מסילה $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma \in C^1$ הפונקציה $f \circ \gamma$ דיפרנציאבילית.

3. מצאו משוואת מישור משיק ומשוואת נורמל עבור כל נקודה על הקבוצות הבאות שבסביבתה ניתן להגדיר משטח חלק.

(א) הפרבולואיד $z = x^2 + y^2$.

(ב) המעגל המתקבל מחיתוך הספירה $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ עם המישור $x = 1/2$.

(ג) הקבוצה המוגדרת ע"י $x^2 - y^2 = 0$ כאשר $z > y \geq 0$.

(ד) הטורוס המתקבל מסיבוב המעגל במישור (x, z) עם מרכז בנקודה $(a, 0, 0)$ ורדיוס $0 < b < a$, סביב ציר z.

4. יהי O_n קבוצת כל המטריצות האורתוגונליות ב $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(א) הראו כי O_2 היא משטח חד מימדי ב $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ב) הראו כי O_3 היא משטח ב $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ומצאו את המימד.

(ג) מצאו את המישור המשיק למטריצת היחידה I במשטח O_3 (בעזרת סעיף ב').

5. חשבו את שטחי המשטחים הבאים הנתונים ב $\mathbb{R}^4$:

(א) $x_4 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $0 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq a^2$

(ב) $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$, $0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq a^2$

6. הוכיחו את הזהויות הבאות בעזרת נוסחת ה coarea:

(א) נתון כי $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ו $a_i > 0$.

$$\int_{S_+^{n-1}} \frac{dS(y)}{\langle a, y\rangle^n} = \frac{1}{(n-1)! a_1 \cdot \cdots \cdot a_n}$$

כאשר $S_+^{n-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^n \,:\, x_i \geq 0\}$. רמז: היעזרו בפונקציה $e^{-\langle a,y\rangle}$.

(ב)

$$\int_{S_+^{n-1}} y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n} dS(y) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p_1+1}{2}\right) \cdot \cdots \cdot \Gamma\left(\frac{p_n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1+\cdots+p_n+n}{2}\right)} \quad p_i \geq 0$$

<u>רמז:</u> חשבו את האינטגרל של הפונקציה $f(x) = e^{-|x|^2} x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}$ על $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, x_i \geq 0\}$.
בדקו את התשובה עבור המקרה הפרטי $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$.

(ג)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^p} = \pi^{n/2} \cdot \frac{\Gamma\left(p-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(p\right)}, \quad p > \frac{n}{2}$$

רמז: היעזרו בפונקציית ביתא של אוילר המקיימת

$$\forall s,t>0 \quad B\left(s,t\right) = \int\limits_0^1 \xi^{s-1}\left(1-\xi\right)^{t-1}\, d\xi = \frac{\Gamma\left(s\right)\Gamma\left(t\right)}{\Gamma\left(s+t\right)}$$

7. (רשות) בעזרת פירוק יחידה, הראו שלכל קבוצה סגורה $A\subset\mathbb{R}^n$ קיימת פונקציה חלקה f, כך ש $A=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f\left(x\right)=0\}$.