

חדו"א 3 - תרגיל בית 12

1. חשבו את השטף של השדה הוקטורי $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ דרך המשטח הנתון.

(א) העיגול $z = h$, $x^2 + y^2 \leq a^2$ עם נורמל בכיוון ציר z חיובי.

(ב) חלק הספירה $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x, y, z > 0$ עם נורמל חיצוני לספירה.

(ג) חלק המישור $x + y + z = a$, $x, y, z > 0$ עם נורמל בעל רכיב z חיובי.

2. נתון כי שדה וקטורי C^1 ב \mathbb{R}^n ו h פונקציה סקלרית C^2 . הראו כי

$$\text{div}(hF) = h\text{div}F + \langle \nabla h, F \rangle \quad (\text{א})$$

$$\text{div}(\nabla h) = \Delta h \quad (\text{ב})$$

כאשר Δh הוא הלפלסיאן של h .

3. יהיו $G \subset \mathbb{R}^n$ תחום חסום עם שפה חלקה C^1 , $f: \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה C^1 ו $u \in \mathbb{R}^n$ וקטור קבוע. הראו כי

$$\int_{\partial G} f \langle N, u \rangle dS = \int_G \frac{\partial f}{\partial u} dx$$

4. תהי $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה C^2 הומוגנית מסדר k , כלומר $H(tx) = t^k H(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}^3$ ו $t > 0$. הוכיחו כי

$$\iint_{S^2} H dS = \frac{1}{k} \iiint_{B^3} \Delta H dx dy dz$$

כאשר S^2 ספירת היחידה ב \mathbb{R}^3 ו B^3 כדור היחידה ב \mathbb{R}^3 .

רמז: היעזרו בזהות אוילר מתרגיל בית מס' 2 שאלה 3.

5. חשבו את השטף (ביחס לנורמל החיצוני) של השדה הוקטורי $F(x, y, z) = (x^k, y^k, z^k)$ דרך ספירת היחידה, כאשר $k \geq -1$ הוא מספר שלם.

6. נניח ש G תחום עם שפה רגולרית וחלקה C^1 . מצאו את האינטגרלים המשטחיים

$$\iint_{\partial G} N dS, \quad \iint_{\partial G} R \times N dS$$

כאשר $R(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ו N הוא הנורמל למשטח ∂G בכיוון חיצוני.

7. נניח כי $n \geq 3$. תהי $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ פונקציה המתאפסת זהותית מחוץ לקבוצה קומפקטית $K \subset \mathbb{R}^n$. נסמן $f = \Delta u$. הראו כי

$$u(x) = c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy$$

חשבו את הקבוע c_n , כתבו נוסחה מתאימה עבור המקרה $n = 2$.

רמז: עבור x קבוע השתמשו בנוסחה השלישית של Green ב $B(x, R) \setminus B(x, \epsilon)$ (כאשר R גדול מספיק ו ϵ קטן מספיק), עבור הפונקציות $u(y) = |x-y|^{2-n}$ ו $v(y) = |x-y|^{-n}$. קחו גבול $\epsilon \rightarrow 0$.

8. נניח ש G תחום עם שפה רגולרית וחלקה C^1 . הראו שאם u פונקציה הרמונית ב \bar{G} , כך שהנגזרת בכיוון הנורמל החיצוני על ∂G מתאפסת אזי u היא פונקציה קבועה.