חדו"א 1 ־ תרגיל בית מס' 13

1. מצאו טור טיילור לפונקציות הבאות, סביב הנקודה $x=0$:
   (א) $f\left(x\right)=\sin\left(x^{3}\right)$, עבור $x\in\mathbb{R}$
   (ב) $f\left(x\right)=\log\left(1+x+x^{2}\right)$, עבור $x\in\left(-1,1\right)$
   (ג) $f\left(x\right)=\frac{1}{1-5x+6x^{2}}$, עבור $x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$
   (ד) $f\left(x\right)=\sin x\cdot\cos3x$, עבור $x\in\mathbb{R}$
   (ה) ★ $f\left(x\right)=\sin^{6}x+\cos^{6}x$, עבור $x\in\mathbb{R}$

2. בעזרת פיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ הוכיחו את אי־השיוויון:

$$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\leq e^{x^{2}/2},\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

3. יהיו $f,g:I\rightarrow\mathbb{R}$ פונקציות קמורות על קטע $I\subset\mathbb{R}$.
   (א) הוכיחו כי $f+g$ פונקציה קמורה.
   (ב) הוכיחו כי cf קמורה, לכל קבוע $c>0$.
   (ג) הוכיחו כי $\max\left\{ f,g\right\}$ קמורה.
   (ד) האם $\min\left\{ f,g\right\}$ בהכרח פונקציה קמורה ?

4. תהי $f:\left(a,b\right)\rightarrow\mathbb{R}$ פונקציה הפיכה וקמורה. האם f^{-1} קמורה ? מה אם נתון כי f פונקציה יורדת ?

5. הוכיחו את אי־השיוויונות הבאים:
   (א) לכל $x,y>0$:

$$x\log x+y\log y\geq\left(x+y\right)\log\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

   (ב) לכל $\alpha>1$ ולכל $x_{1},x_{2},\ldots,x_{n}>0$:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_{k}\right)^{\alpha}\leq\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}x_{k}^{\alpha}$$

6. ★ נסמן $x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$, כאשר $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(0,\pi)$. הוכיחו כי מתקיים אי־השיוויון הבא:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(x_k)}{x_k}\leq\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

7. הוכיחו את אי־השיוויונות הבאים:

(א) עבור $\alpha_k,x_k>0$ לכל $k\in\{1,\ldots,n\}$ כך שמתקיים $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1$:

$$\frac{1}{\frac{\alpha_1}{x_1}+\ldots+\frac{\alpha_n}{x_n}}\leq x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}\leq\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n$$

(ב) עבור $\alpha_k>0,x_k,y_k\geq0$ לכל $k\in\{1,\ldots,n\}$ כך שמתקיים $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1$:

$$x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}+y_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot y_n^{\alpha_n}\leq(x_1+y_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x_n+y_n)^{\alpha_n}$$

(ג) עבור $\alpha_i>0,x_{i,j}\geq0$ לכל $j\in\{1,\ldots,m\}$, ולכל $i\in\{1,\ldots,n\}$ כך שמתקיים $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1$:

$$\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}x_{i,j}^{\alpha_i}\leq\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}x_{i,j}\right)^{\alpha_i}$$

<u>רמז:</u> הוכיחו באינדוקציה על m והיעזרו בסעיף ב'.

8. נתון כי $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה קמורה ובנוסף:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=0.$$

הוכיחו כי הפונקציה $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ היא מונוטונית עולה ב $(0,\infty)$.