סמסטר א' תשע"א

<u>תרגיל מס' 1 - חדו"א 1</u>

1. פתרו את אי־השיוויונים הבאים:
   (א) $|2x-1| < |x-1|$
   (ב) $|x(1-x)| < 0.05$
   (ג) $\big|\,|x+1|-|x-1|\,\big| < 1$
   (ד) $|\sin x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$
   (ה) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1} \geq \sqrt{3x-2}$
2. יהי $\varepsilon > 0$. הוכיחו כי אם מתקיים $|x-a| < \varepsilon$ וגם $|y-b| < \varepsilon$ אזי
   $$|xy-ab| < \varepsilon(|a|+|b|+\varepsilon)$$
3. כתבו את $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A^c, B^c עבור $A=(-\infty,1]\cup(3,5)$, $B=[0,4)$.
4. הוכיחו כי המספרים הבאים הם <u>אי־רציונליים</u>:
   (א) $\sqrt[3]{3}$
   (ב) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$
   (ג) $\sqrt{k}$ כאשר $k \in \mathbb{N}$, וכן k אינו ריבוע של מספר שלם. רמז: כל מספר טבעי ניתן לרשום כמכפלה $k=p_1^{r_1}\cdots p_m^{r_m}$ כאשר ה־p_i־ים הם מספרים ראשוניים.
   (ד) ★ $0.12345678910111213\cdots$ (כל המספרים הטבעיים רשומים ברצף)
5. (א) האם קיימים מספרים <u>רציונליים</u> a,b כך ש־ $a+b$ <u>אי־רציונלי</u>?
   (ב) האם קיימים מספרים <u>אי־רציונליים</u> c,d כך ש־ $c+d$ <u>רציונלי</u>?
   (ג) ★ האם קיימים מספרים <u>אי־רציונליים</u> α,β כך ש־ α^β <u>רציונלי</u>?
6. הוכיחו כי אם $a+\frac{1}{a}$ מספר שלם, אז גם $a^3+\frac{1}{a^3}$ מספר שלם.
7. הוכיחו את אי־השיוויונים הבאים ומצאו תנאי הכרחי ומספיק לקיום שיוויון:
   (א) $|x|+|y| \geq |x-y| \geq \big|\,|x|-|y|\,\big|$ לכל x,y
   (ב) $\left|a+\frac{1}{a}\right| \geq 2$ לכל $a \neq 0$
   (ג) $\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}$ לכל $x,y>0$
   (ד) $|a-1|+|a-2|+|a-3| \geq 2$ לכל a

8. ★ נתון כי המספרים $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$ מהווים סידרה חשבונית. הוכיחו כי

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}$$

9. הוכיחו באינדוקציה (או בדרך אחרת):

(א) $\sum_{k=1}^{n} k^2 \left(= 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ לכל n טבעי.

(ב) אי־שיוויון Bernoulli:

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

לכל $x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

(ג) ★ $n^{n+1} > (n + 1)^n$ לכל $n \geq 3$.

(ד) $7^n + 12n + 17$ מתחלק ב־ 18 לכל n טבעי.

(ה) ★ $\frac{x^n+y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ לכל n טבעי ולכל $x, y \geq 0$.

(ו) לכל n טבעי מתקיים: $2(\sqrt{n+1} - 1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$.

10. יהיו $a, b, c > 0$ המקיימים $a + b + c = 1$. הוכיחו כי $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

11. הוכיחו את הזהות הטריגונומטרית $\sin(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.

12. הוכיחו או הפריכו (כל המספרים ממשיים אלא אם נאמר אחרת):

(א) $\forall \epsilon > 0 \; \exists x : \; \forall y \; |x - y| < \epsilon$

(ב) $\exists \epsilon > 0 : \; \forall x, y \; |x - y| \geq \epsilon$

(ג) $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x > n : \; x < \sqrt{x}$

(ד) $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x \leq n : \; x \geq \sqrt{x} \; \wedge \; x > 0$

13. בשאלה זו נוכיח את אי־השיוויונות הבאים: $\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$ הדרכה: הוכיחו תחילה כי מתקיים

$$\binom{2n}{0} \leq \binom{2n}{1} \leq \ldots \leq \binom{2n}{n}$$

אחר כך, הוכיחו כי לכל $0 \leq k \leq n$ מתקיים $\binom{2n}{n-k} = \binom{2n}{n+k}$, והסיקו כי מתקיים

$$\binom{2n}{2n} \leq \binom{2n}{2n-1} \leq \ldots \leq \binom{2n}{n}$$

כעת, השתמשו בנוסחת הבינום עבור $(1+1)^{2n}$ והוכיחו את אי־השיוויונות המבוקשים.