סמסטר א' תשע"א

תרגיל מס' 4 - חדו"א 1

1. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ אזי $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ (מה לגבי הכיוון ההפוך?)

(ב) אם $\{a_n\}$ סדרה חסומה ו- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ אזי $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

(ג) אם הסדרה a_n מתבדרת ל-∞, והסדרה b_n מתכנסת או מתבדרת ל-∞, אזי הסדרה $a_n + b_n$ מתבדרת ל-∞

(ד) נניח ש- $a_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n$ אזי מתקיים $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$

(ה) נניח ש- $a_n \geq 0$ ובנוסף מתקיים ש- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p < 1$ אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
רמז: הראו שלכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $a_n \leq (\epsilon+p)^n$.

2. חשבו בעזרת "משפט הסנדוויץ'":

(א) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot\sin 1 + 2\cdot\sin 2 + \cdots + n\cdot\sin n}{n^3}$

(ב) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$ כאשר $a > b > 0$.

(ג) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{10^n}$

(ד) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+n}\right)$

(ה) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n^2}}\right)$

3. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)^{2n^2+3n}$

(ב) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n+10}$

4. עבור שני מספרים חיוביים a_1, b_1 נגדיר שתי סדרות באופן הבא:

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2},\ b_2 = \sqrt{a_1\cdot b_1}, \ldots\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n\cdot b_n}$$

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

5. הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות וחשבו את גבולותיהן:

(א) $x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$

(ב) $x_1 = \sqrt{6}, \quad x_{n+1} = \sqrt{6 \cdot x_n}$

(ג) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}$

(ד) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4(1 - a_n)}$

6. (א) תהי $\{a_n\}$ סידרה כך ש־ $a_n > 0$ לכל n. נתון כי הסידרה מתכנסת ל־ a, סופי או אינסופי. נסמן $b_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

הדרכה: השתמשו במשפט על גבול ממוצע חשבוני, באי־שיוויון הממוצעים ובמשפט הסנדוויץ'!

(ב) בעזרת סעיף א' הוכיחו כי אם $x_n > 0$ לכל n ו־ $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$, סופי או אינסופי, אז $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$.

(ג) בעזרת סעיפים א' ו־ב' חשבו

i. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)}$ כאשר $p(n)$ פולינום כלשהוא במשתנה n.

ii. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$

iii. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{2^{3n} \cdot n! \cdot (2n)!}}$

iv. ★ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

7. הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות:

(א) $a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}$

(ב) $b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$

(ג) $c_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}$

(ד) ★ $d_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$ (לא להשתמש ב־ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

8. (אין קשר בין הסעיפים בשאלה זו)

(א) ★ יהיו $a_0, a_1, \cdots, a_k$ מספרים ממשיים כך ש־ $a_0 + a_1 + \cdots + a_k = 0$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} \left(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_k\sqrt{n+k}\right) = 0$.

(ב) ★ חשבו $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{n+k}{n^2}$

(ג) ★ חשבו $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^k}{n^n}$