סמסטר א' תשע"א

תרגיל מס' 7 - חדו"א 1

1. תנו דוגמה לכך שהגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$ אינו קיים, אבל $\lim_{n\to\infty} f(n)$ (כאשר $n\in\mathbb{N}$) קיים.
האם יתכן המצב ההפוך?

2. הוכיחו את קיום הגבולות הבאים לפי הגדרת הגבול של היינה:

(א) $\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2-6}=-3$

(ב) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x-1}{x-1}=1$

3. הוכיחו את קיום הגבולות הבאים לפי הגדרת הגבול של קושי:

(א) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x}=2$

(ב) $\lim_{x\to\infty} e^{1/x}=1$

(ג) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{2}{3}$

4. חשבו את הגבולות החד־צדדיים הבאים:

(א) $\lim_{x\to 2-}\frac{2}{8-x^3}$

(ב) $\lim_{x\to 3+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{|3-x|}$

(ג) $\lim_{x\to 1+} 3^{1/(x-1)}$

5. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

(ב) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

(ג) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{x}$

(ד) $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

(ה) $\lim_{x\to\infty} x\cdot\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$

(ו) ★ $\lim_{x\to 0} x\cdot\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$

(ז) $\lim_{x\to\infty}(3^x-2^x)^{1/x}$

6. תהי f מוגדרת ע"י:

$$f(x)=\begin{cases} n, & x=\frac{m}{n},\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N},\ m,n \text{ זרים} \\ 0, & x=0 \text{ או } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

(א) הראו כי לכל $x_0\in\mathbb{R}$ לא קיימת סביבה של x_0 שבה f חסומה.

(ב) הראו כי לכל $x_0\in\mathbb{R}$ הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ לא קיים, אפילו לא במובן הרחב.

7. תהי f מוגדרת ע"י:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x}, & x>0 \\ \frac{x+5}{2x+\alpha}, & x<0 \end{cases}$$

עבור אילו ערכי α קיים ל־f גבול בנקודה $x=0$?

8. הוכיחו כי אם f חסומה בסביבת נקודה x_0 ו־$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, אז $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$.

9. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$ ו־$\lim\limits_{x\to 1} g(x)=10$, אז $\lim\limits_{x\to 2} g(f(x))=10$.

(ב) אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, ו־$\lim\limits_{x\to \infty} g(x)=L$, אז $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=L$.

10. שאלה זו מתייחסת לתכונות של פונקציות רציפות.

(א) נתונה פונקציה $f\in C[a,b]$ (כלומר f רציפה בקטע $[a,b]$). הוכיחו כי גם $|f|\in C[a,b]$.

(ב) נתונות $f,g\in C[a,b]$. נגדיר פונקציות חדשות באופן הבא:

$$m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$
$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$$

הוכיחו שגם $M(x),m(x)\in C[a,b]$.

(ג) נתונות שלוש פונקציות $f_1,f_2,f_3\in C[a,b]$. נגדיר את הפונקציה $f(x)$ להיות הערך האמצעי (חציון) מבין הערכים $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$. הראו כי $f(x)$ רציפה ב־$[a,b]$.

11. מצאו את תחום הרציפות של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x)=\lfloor x^2\rfloor \sin(\pi n x)$

(ב) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{nx}+x}{e^{nx}+1}$

(ג) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\log(e^n+x^n)$

(ד) ★ $f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n+x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}}$