

1 בפברואר 2011

בחינה - חדו"א 1א, מועד א

סמסטר א' תשע"א, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: דר' ירון אוסטרובר, פרופ' בועז קלרטג

משך הבחינה שלוש שעות. אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון. יש לנסח במדויק כל משפט או טענה מהכיתה בה הנכם משתמשים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם. משקל כל שאלה 22 נקודות.

1. הוכיחו את משפט קנטור, לפיו פונקציה רציפה בקטע סגור, רציפה בו במידה שווה. (22 נקודות)

2. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית בעלת מחזור $T > 0$. הוכיחו שקיימות $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ עם $|x_1 - x_2| = T/2$ כך ש- $f(x_1) = f(x_2)$. (22 נקודות)

3. נתון ש- f גזירה ב- \mathbb{R} , $f(0) = 0$ ו- $|f'(x)| < 1$ לכל $x \in (0, 1)$. הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} f^2\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)$$

מתכנס.

4. (א) תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה a . נניח ש- f גזירה בנקודה a , ו- $f'(a) = 2$, $f(a) = 5$. חשבו את

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right)^n$$

(ב) האם $f(x) = x^{2/3} \ln x$ רציפה במידה שווה ב- $(1, \infty)$? (11 נקודות)

5. תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה המקיימת

$$|f(x)| \leq |\sin^3 x|$$

לכל $|x| \leq 1$.

(א) הוכיחו ש- f גזירה באפס.

(5 נקודות)

(ב) הוכיחו כי אם f גזירה פעמיים באפס, אז בהכרח $f''(0) = 0$.

(11 נקודות)

(ג) נתון ש- f גזירה פעמיים בסביבה מנוקבת של 0. האם בהכרח f גזירה פעמיים בנקודה אפס?

(6 נקודות)

בהצלחה!