

## בחינה - חדו"א 1א, מועד ב

סמסטר א' תשע"א, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: דר' ירון אוסטרובר, פרופ' בועז קלרטג

משך הבחינה שלוש שעות. אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון. יש לנסח במדויק כל משפט או טענה מהכיתה בה הנכם משתמשים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם. משקל כל שאלה 22 נקודות.

1. תהי סדרה חסומה. נניח ש- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  סדרה המורכבת מגבולות חלקיים של  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , ויהי  $L \in \mathbb{R}$ . נתון ש-
- (22 נקודות)

$$b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$$

הוכיחו ש- $L$  הוא גבול חלקי של הסדרה המקורית  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

2. עבור שני מספרים חיוביים  $a_1, b_1$  נגדיר שתי סדרות באופן הבא:
- (22 נקודות)

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (n \geq 1).$$

הוכיחו כי הגבולות הבאים קיימים ושווים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(רמז: אפשר להשתמש באי-שוויון הממוצעים).

3. הוכיחו כי הפונקציה
- (22 נקודות)

$$f(x) = x + \frac{\sin(x)}{x}$$

רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$ .

4. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים בנקודה  $a$ . הוכיחו כי (22 נקודות)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a)$$

(רמז: פיתוח טיילור).

5. יהי  $0 \leq \alpha \leq 1$ . נסמן

$$f(x) = (x + \alpha) \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$$

(א) הוכיחו כי  $f$  עולה ב-  $[1, \infty)$  עבור  $\alpha = 0$  ויורדת ב-  $[1, \infty)$  עבור  $\alpha = 1$ . (11 נקודות)

(ב) יהי  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ . הוכיחו כי קיים  $M > 0$  כך ש-  $f$  עולה ב-  $[M, \infty)$ . (11 נקודות)

**בהצלחה!**