19 ביולי 2013

בחינה ־ חדו"א 3, מועד א

סמסטר ב, תשע"ג, אוניברסיטת תל אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

מתרגל: אלכס סגל

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור ארבע מתוך חמש השאלות. אין להשתמש במחשבון, מותר להשתמש בדף נוסחאות $A4$ יחיד, כתוב בשני הצדדים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

פתרון מלא של שתי שאלות מזכה בציון עובר.

הקיפו את השאלות שבחרתם לענות עליהן:

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

בהצלחה!

(25 נקודות) 1. נסמן $A = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4\,;\, x^2+y^2+z^2+w^2 \leq 1\}$. חשבו את

$$\int_A e^{x^2+y^2-z^2-w^2}\,dxdydzdw.$$

(25 נקודות) 2. נגדיר $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,x^2+y^2\le 1\}$. חשבו את

$$\max_{(x,y)\in A}\left[\sin x+\sin y\right]$$

3. נתונות פונקציות $f, g, V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, חלקות C^2, כך של־ f יש תומך קומפקטי. הוכיחו כי

(15 נקודות) (א) $$\int_{\mathbb{R}^n} g(\Delta f - \nabla f \cdot \nabla V)e^{-V} = -\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla f \cdot \nabla g)e^{-V}$$

(10 נקודות) (ב) $$\int_{\mathbb{R}^n} g(\Delta f - \nabla f \cdot \nabla V)e^{-V} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\Delta g - \nabla g \cdot \nabla V)e^{-V}$$

4. קבוצה $A \subset \mathbb{R}^3$ נקראת "שכבה ברוחב h" אם קיים וקטור יחידה $\theta \in \mathbb{R}^3$ ומספרים $a, b \in \mathbb{R}$ עם $b - a = h$ כך ש־

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \, ; \, a \le x \cdot \theta \le b\right\}.$$

נסמן $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\}$, ספרת היחידה ב־ $\mathbb{R}^3$.

(א) תהי $A \subset \mathbb{R}^3$ שכבה ברוחב h. הוכיחו כי שטח החיתוך $A \cap S^2$ אינו עולה על $2\pi h$. (15 נקודות)

(ב) נתונות שכבות $A_1, \ldots, A_{1999} \subset \mathbb{R}^3$, כולן ברוחב $1/1000$ בדיוק. הוכיחו כי (10 נקודות)

$$S^2 \not\subset \bigcup_{i=1}^{1999} A_i.$$

(25 נקודות) 5. יהי $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ משטח דו־ממדי, חלק C^1. נניח שקיימת קבוצה פתוחה $A \subset \mathbb{R}^2$ ופונקציות גזירות ברציפות $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ כך ש־

$$
\begin{aligned}
M^2 &\subseteq \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, (x,y) \in A,\ \ z = f(x,y)\right\}, \\
M^2 &\subseteq \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, (x,z) \in A,\ \ y = g(x,z)\right\}, \\
M^2 &\subseteq \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, (y,z) \in A,\ \ x = h(y,z)\right\}.
\end{aligned}
$$

הוכיחו כי לכל נקודה $(x,y,z) \in M^2$,

$$
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial g}{\partial z}(x,z) \cdot \frac{\partial h}{\partial y}(y,z) = -1
$$

(רמז: השתמשו בפונקציה שמתאפסת ב־ $U \cap M^2$ כאשר $(x,y,z) \in U \subset \mathbb{R}^3$).

במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):