

בחינה - חדו"א 3, מועד ב

סמסטר ב, תשע"ג, אוניברסיטת תל אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

מתרגל: אלכס סגל

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור ארבע מתוך חמש השאלות. אין להשתמש במחשבון, מותר להשתמש בדף נוסחאות A4 יחיד, כתוב בשני הצדדים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

פתרון מלא של שתי שאלות מזכה בציון עובר.

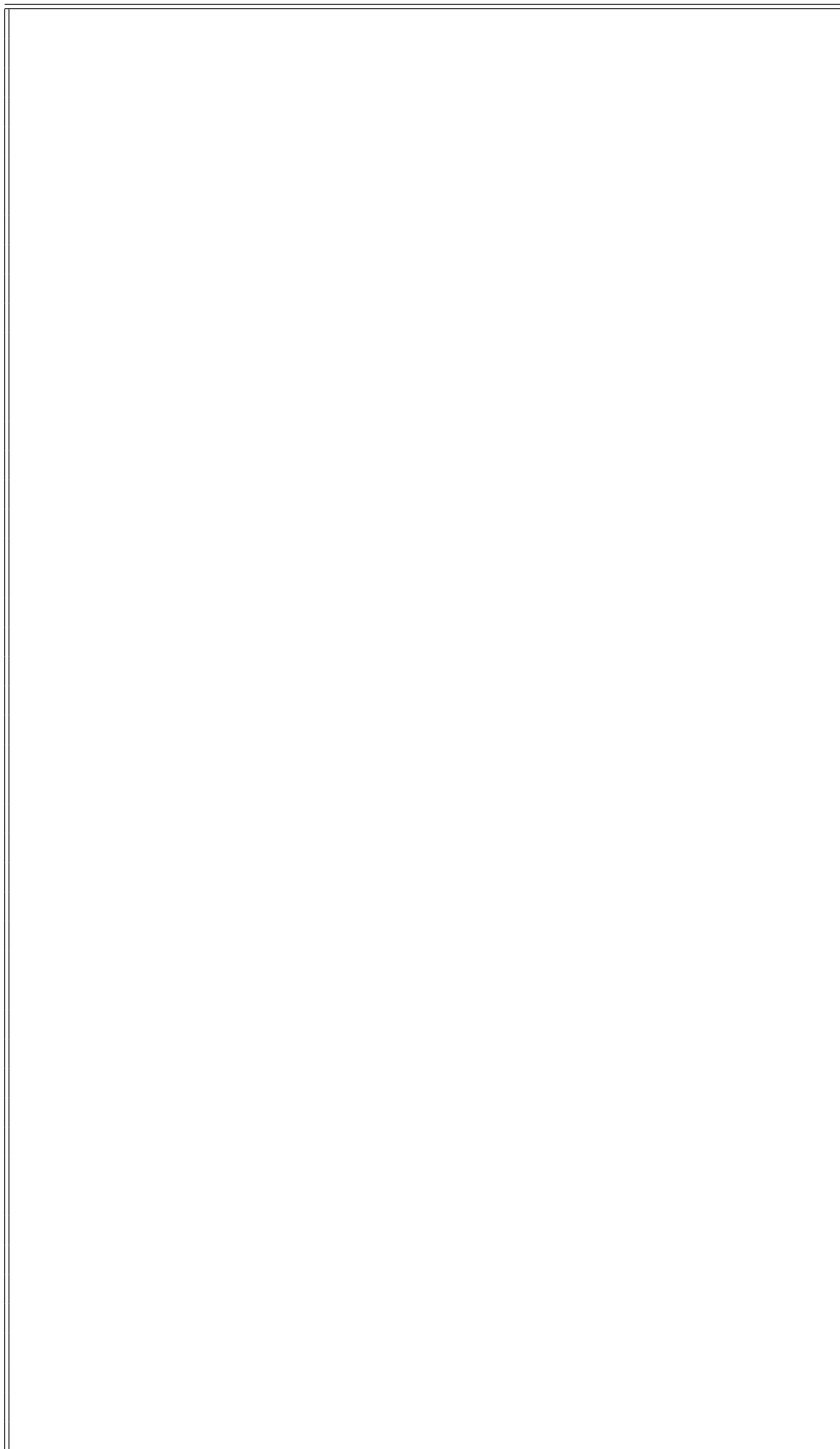
הקיפו את השאלות שבחרתם לענות עליהן:

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

בהצלחה!

1. חשבו את הנפח התלת-ממדי של היריעה

$$M^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 = z^2 + w^2, 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$



$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}$$

חשבו את

$$\min_{(x_1, x_2, x_3) \in A} \sum_{i=1}^3 x_i \log x_i$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2) \log^p(2+x^2+y^2)}$$

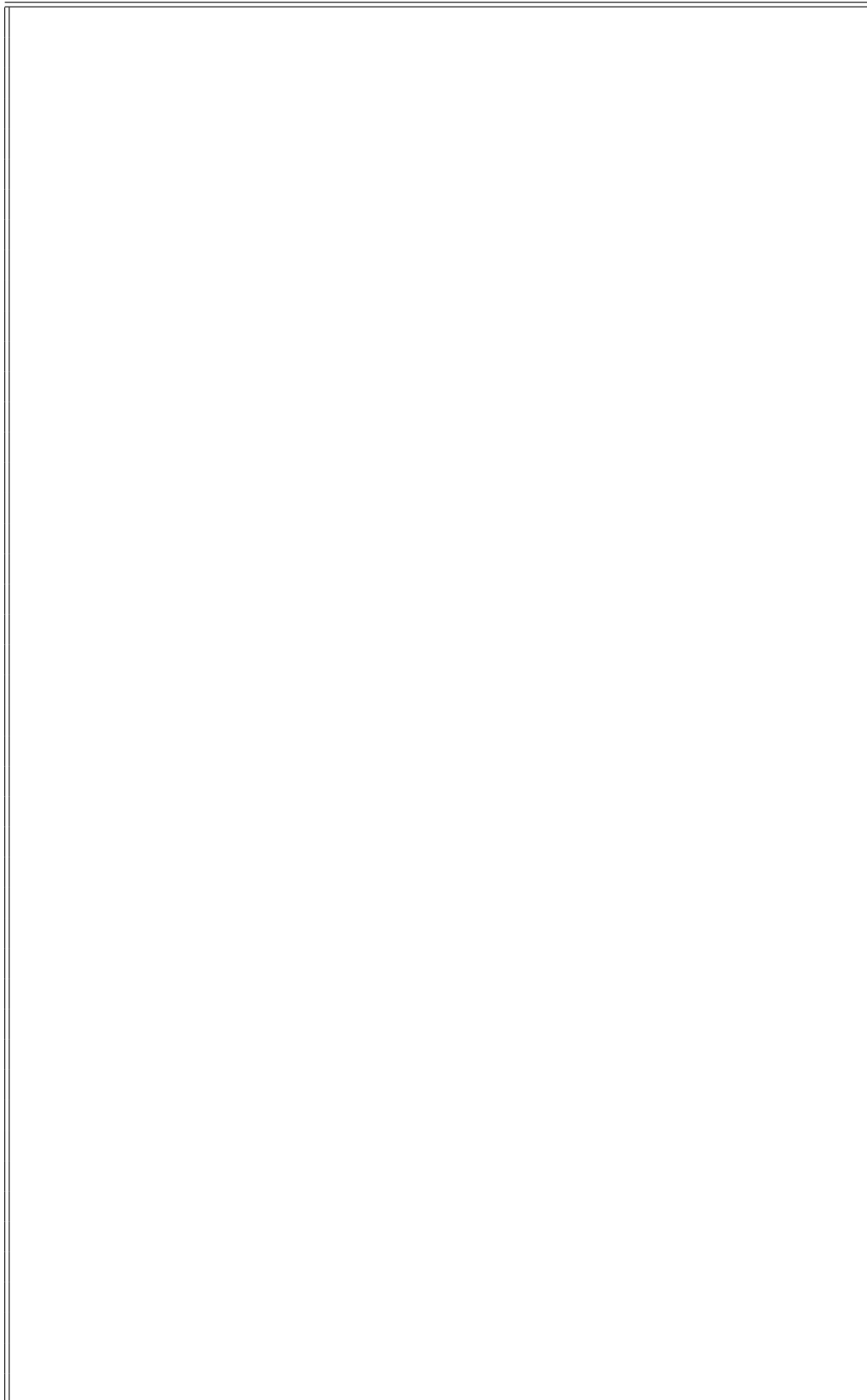
מתכנס?

$$B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$$

תהי $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חלקה C^2 המוגדרת בסביבת $B(0, 1)$. נניח ש- f הרמונית (כלומר, $\Delta f = 0$). נתון ש- f מתאפסת בשפת הכדור $B(0, 1)$.

הוכיחו ש- f מתאפסת גם בפנים הכדור $B(0, 1)$.

(רמז: הביטו בשדה הוקטורי $(f \nabla f)$)



5. תהינה $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות חלקות C^2 כך שלכל $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) + g(\nabla f(x)) = x \cdot \nabla f(x)$$

נסמן ב- $\nabla^2 f(x)$ את מטריצת הנגזרות השניות, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n}$, שכל $x \in \mathbb{R}^n$, המטריצה $\nabla^2 f(x)$ הפיכה. נתון

(א) הראו כי לכל $x \in \mathbb{R}^n$

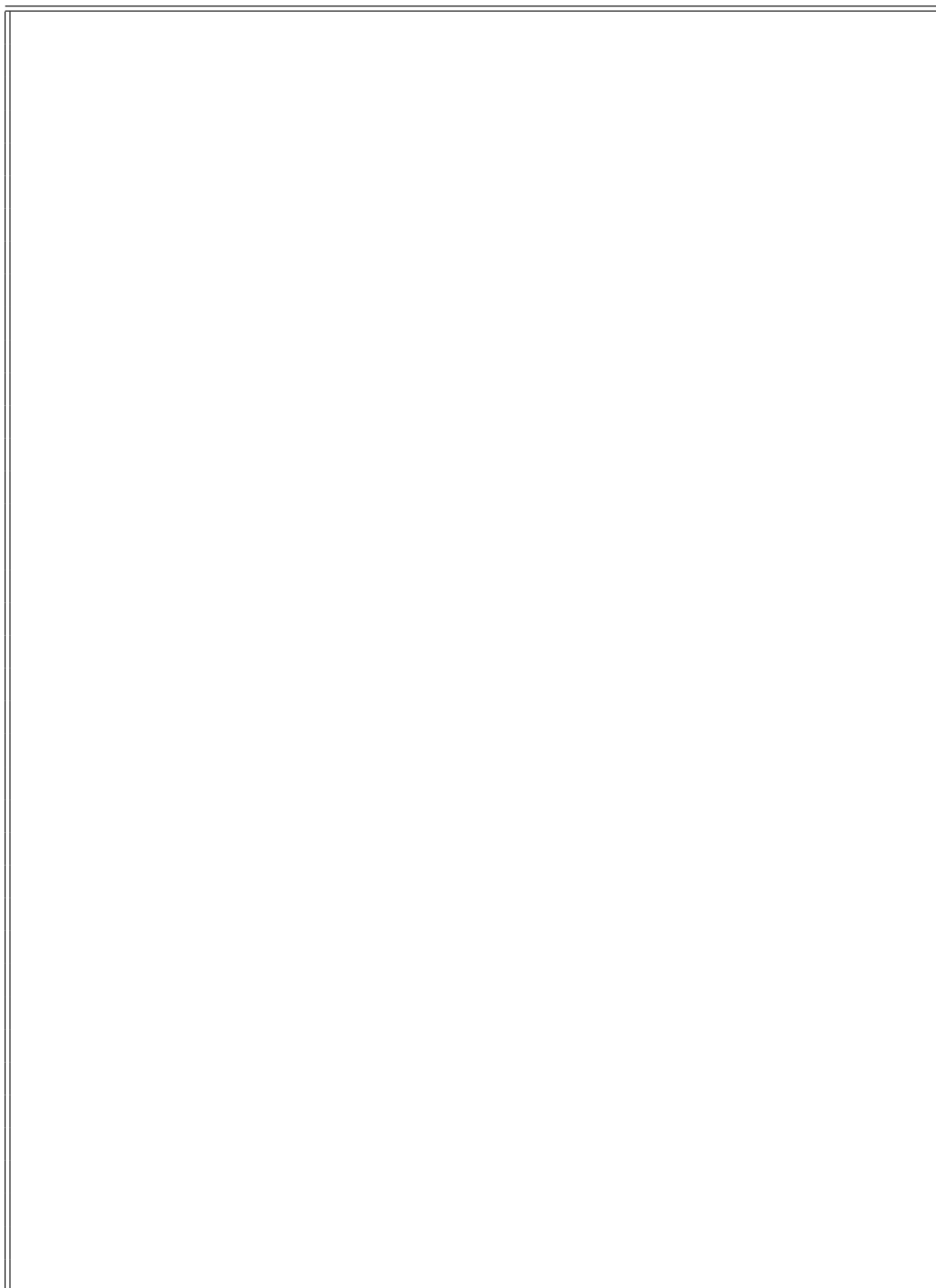
(15 נקודות)

$$\nabla g(\nabla f(x)) = x$$

(ב) תהי $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה עם תומך קומפקטי. הוכיחו ש-

(10 נקודות)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\nabla f(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) |\det \nabla^2 g(x)| dx$$





במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

