12 בספטמבר 2013

בחינה ־ חדו"א 3, מועד ב

סמסטר ב, תשע"ג, אוניברסיטת תל אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג
מתרגל: אלכס סגל

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור ארבע מתוך חמש השאלות. אין להשתמש במחשבון, מותר להשתמש בדף נוסחאות $A4$ יחיד, כתוב בשני הצדדים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

פתרון מלא של שתי שאלות מזכה בציון עובר.

הקיפו את השאלות שבחרתם לענות עליהן:

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

בהצלחה!

(25 נקודות) 1. חשבו את הנפח התלת־ממדי של היריעה

$$M^3 = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4\,;\, x^2+y^2 = z^2+w^2,\ 0 < x^2+y^2 < 1\right\}$$

(25 נקודות) 2. נביט במשולש

$$A=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,;\,x_1+x_2+x_3=1,\,x_1>0,\,x_2>0,\,x_3>0\right\}$$

חשבו את

$$\min_{(x_1,x_2,x_3)\in A}\sum_{i=1}^{3}x_i\log x_i$$

(25 נקודות) 3. עבור אילו ערכי p, האינטגרל

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)\log^p(2+x^2+y^2)}$$

מתכנס?

(25 נקודות) 4. נסמן

$$B(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^n;|x|\le 1\}$$

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה חלקה C^2 המוגדרת בסביבת $B(0,1)$. נניח ש־ f הרמונית (כלומר, $\Delta f=0$). נתון ש־ f מתאפסת בשפת הכדור $B(0,1)$.

הוכיחו ש־ f מתאפסת גם בפנים הכדור $B(0,1)$.

(רמז: הביטו בשדה הוקטורי $f\nabla f$)

5. תהיינה $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציות חלקות C^2 כך שלכל $x\in\mathbb{R}^n$,

$$f(x)+g(\nabla f(x))=x\cdot\nabla f(x)$$

נסמן ב־ $\nabla^2 f(x)$ את מטריצת הנגזרות השניות, $\nabla^2 f(x)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right)_{i,j=1,\ldots,n}$. נתון שלכל $x\in\mathbb{R}^n$, המטריצה $\nabla^2 f(x)$ הפיכה.

(15 נקודות) (א) הראו כי לכל $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\nabla g(\nabla f(x))=x$$

(10 נקודות) (ב) תהי $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה עם תומך קומפקטי. הוכיחו ש־

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\nabla f(x))dx=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\left|\det\nabla^2 g(x)\right|dx$$

במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):