

15 ביולי 2016

## בחינה - פונקציות ממשיות, מועד א

סמסטר א, תשע"ו, אוניברסיטת תל אביב

מרצה: בועז קלרטג

מתרגל: ינון ספינקא

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור את כל ארבע השאלות. אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

פתרון מלא של שתי שאלות מזכה בציון עובר.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

# בהצלחה!

1. תהי  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה בהחלט המקיימת  $f'(x) = 0$  כמעט לכל  $x \in [0, 1]$ .  
(25 נקודות) הוכיחו כי  $f$  קבועה.

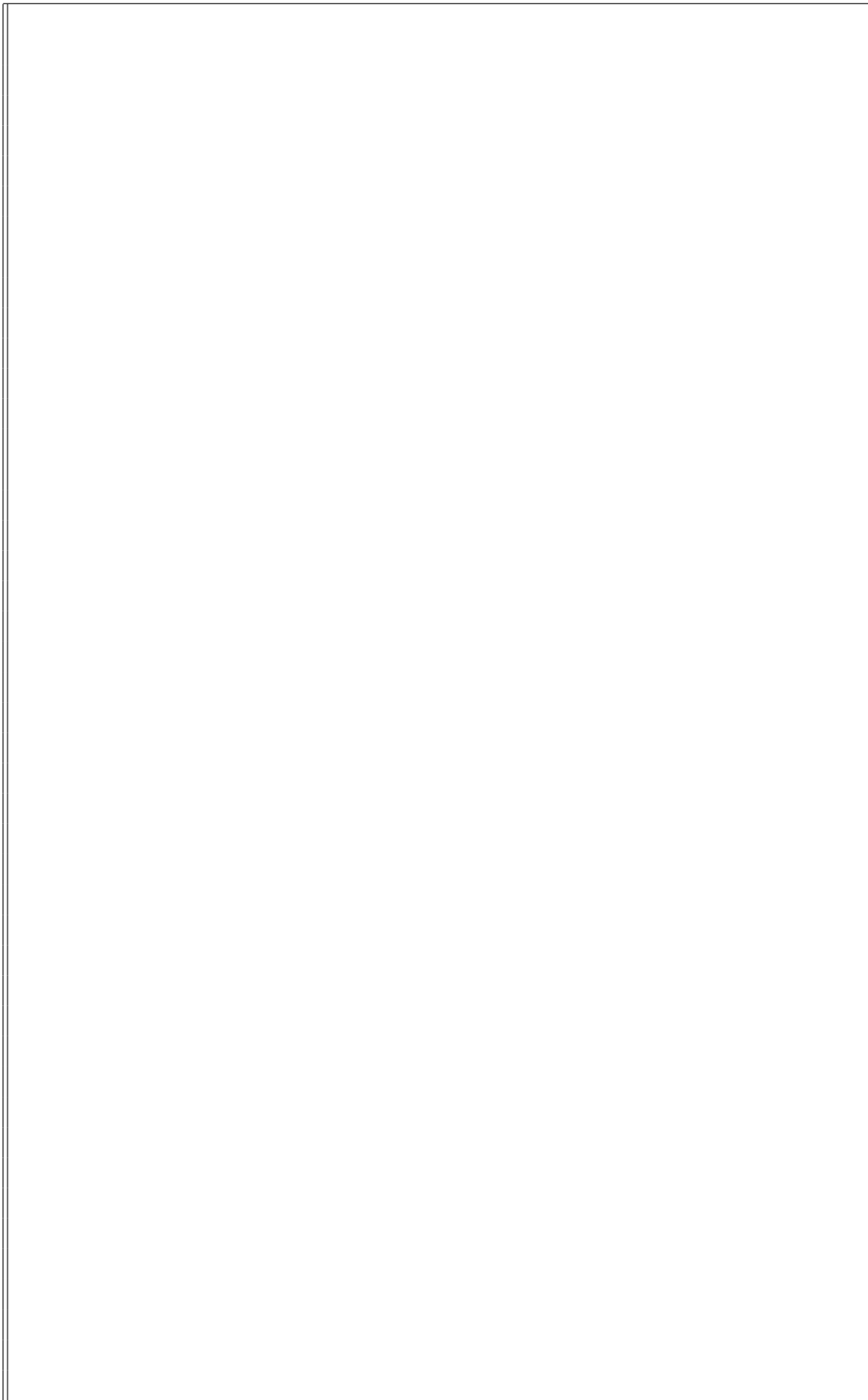
2. מצאו פונקציה  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , עולה ממש ורציפה בהחלט, כך ש-  $f'$  מתאפסת על קבוצה ממידה חיובית. (25 נקודות)

3. תהי  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית כך שלכל  $s > 0$  מתקיים ש- (25 נקודות)

$$\int_{[0,1]} e^{sf} \leq e^{s^2}$$

הוכיחו כי לכל  $t > 0$ ,

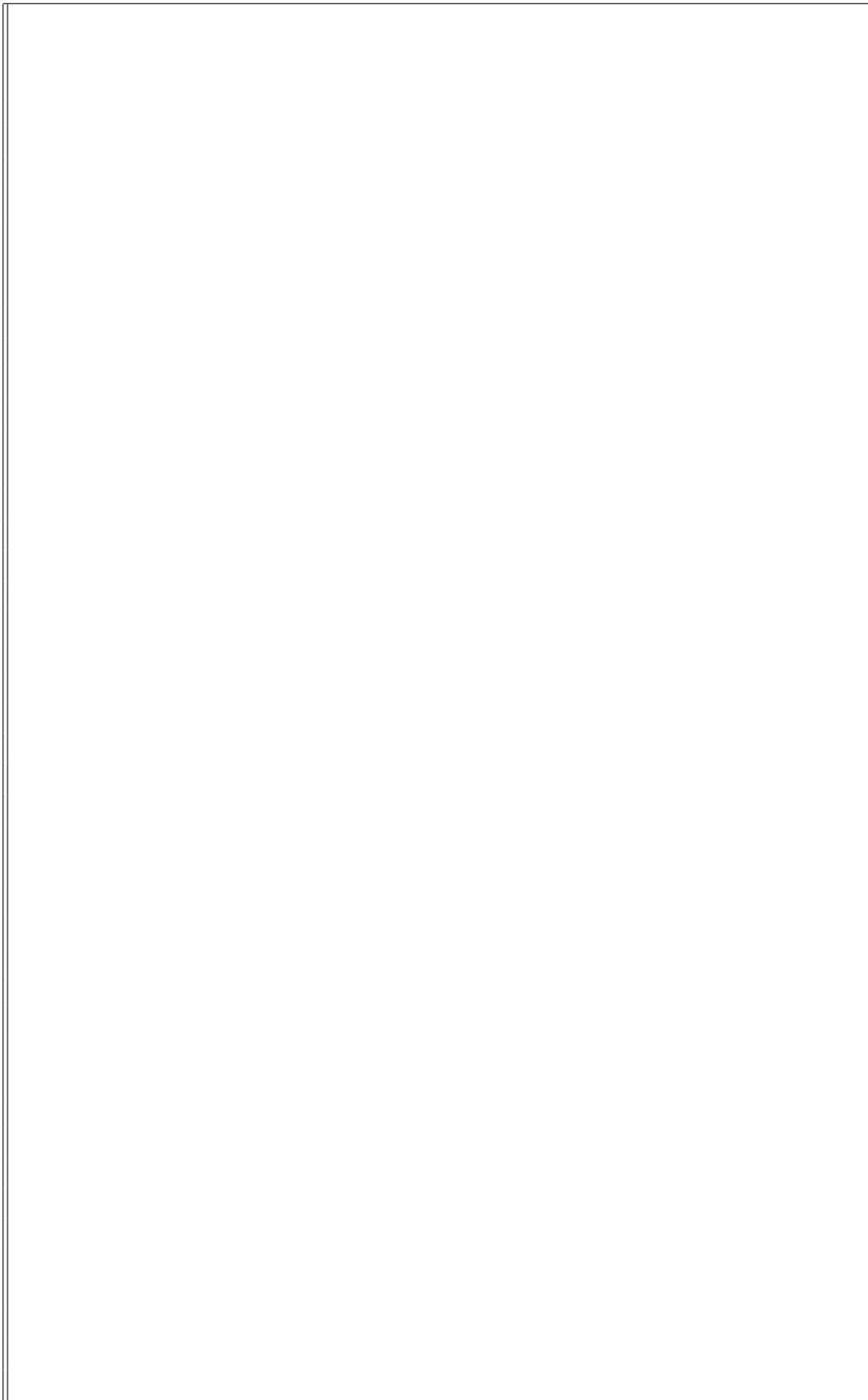
$$m(\{x \in [0, 1]; f(x) > t\}) \leq e^{-t^2/4}$$



4. נסמן ב-  $\mathcal{F}$  את אוסף הפונקציות האינטגרביליות  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  שמקיימות  $\int_{\mathbb{R}} f = 1$ . (25 נקודות)  
 נגדיר  $g(x) = x^2 + \sin(2016x)$ . הוכיחו ש-

$$\inf_{f \in \mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}} fg$$

מתקבל עבור  $f$  מהצורה  $f = 1_{\{g < s\}}$  עבור אישהוא קבוע  $s \in \mathbb{R}$ .  
 (כמובן,  $1_{\{g < s\}}(x) = 1$  כאשר  $g(x) < s$ , ואחרת  $1_{\{g < s\}}(x) = 0$ )



במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

