

בחינה, מועד א' - מבוא לאנליזה הרמונית

סמסטר ב' תשע"ב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

משך הבחינה שלוש שעות. אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

חלק ראשון

פתרו שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות:

1. עיקרון הלוקאליזציה של Riemann: יהיו $f \in L^1(\mathbb{T})$, $x_0 \in \mathbb{T}$. נתון ש- f מתאפסת בסביבה של x_0 . הוכיחו כי טור פורייה של f שואף לאפס במידה שווה בסביבת x_0 . (30 נקודות)

2. יהי U אופרטור אוניטרי במרחב הילברט ספרבילי. נתון שקיים וקטור ציקלי (כלומר, וקטור v כך ש- $\{U^n v; n \in \mathbb{Z}\}$ צפוף). הוכיחו ש- U שקול אוניטרי לאופרטור מהצורה (30 נקודות)

$$\tilde{U}(f(t)) = e^{it} f(t) \quad (t \in \mathbb{T})$$

הפועל במרחב $L^2_\mu(\mathbb{T})$ עבור איזושהיא מידת בורל סופית μ על המעגל.

3. יהי $0 < \varepsilon < 1$. הוכיחו כי הפונקציה (30 נקודות)

$$x \mapsto \frac{1}{(1 + |x|^2)^\varepsilon} \quad (x \in \mathbb{R})$$

היא טרנספורם פורייה של פונקציה ב- $L^1(\mathbb{R})$.

4. תהי $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ פונקציית הסימן, ונסמן ב- $L_f \in \mathcal{S}^*$ את הדיסטריבוציה המתונה (tempered distribution) המתאימה ל- f . הוכיחו כי (30 נקודות)

$$\widehat{L}_f(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi i} \int_{|t| > \varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt \quad (\varphi \in \mathcal{S}).$$

חלק שני

פתרו את השאלה הבאה:

5. לכל $\varepsilon > 0$ מצאו פולינום טריגונומטרי P על המעגל כך ש- (10 נקודות)

$$P^*(t) = \sup_{M, N > 0} \left| \sum_{n=-M}^N \hat{P}(n) e^{int} \right|$$

מקיים $\|P\|_\infty < \varepsilon \|P^*\|_\infty$.

בהצלחה!