

# DON'T PANIC

## 1 מבנה המבחן

הבחינה מורכבת מ-5 שאלות, משקל כל אחת 22 נקודות (הציון המקסימלי הוא בכל זאת 100). בשאלה הראשונה תתבקשו להוכיח משפט שלמדתם בכיתה, ראו רשימה בסעיף הבא. השאלה השנייה תהיה לקוחה משיעורי הבית.

משך הבחינה שלוש שעות. אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון. יש לנסח במדויק כל משפט או טענה מהכיתה בה הנכם משתמשים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

## 2 רשימת משפטים למבחן

בשאלה הראשונה במבחן תתבקשו להוכיח משפט מהרשימה הבאה. ישנם משפטים שלמדנו בכיתה ולא מופיעים ברשימה (למשל, ש- $\pi$  אי-רציונלי), וחשוב לדעת לנסחם במדויק.

**שימו לב: המשפטים והטענות שהוכחו בכיתה ולא מופיעים ברשימה למטה יכולים להועיל בפתרון שאר השאלות במבחן!!! מומלץ מאד להכיר היטב ולדעת לנסח במדויק את הטענות הנ"ל.**

1. הוכחה שלכל מספר ממשי חיובי יש שורש, מתוך האקסיומות של שדה סדור שלם.
2. כל סדרה עולה וחסומה מתכנסת.
3. משפט בולצאנו-ויירשטראס: לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת (להוכיח גם טענות עזר שמשמשות בהן).
4. תהי  $\{a_n\}$  סדרה כלשהיא ותהי  $\{b_n\}$  סדרה המורכבת מגבולות חלקיים של  $\{a_n\}$ . אם  $b_n \rightarrow b_0$  אזי  $b_0$  הוא גבול חלקי של  $a_n$ .
5. תהי  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  סדרה חסומה. אזי הגבול החלקי הגדול ביותר שווה ל-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{a_k; k \geq n\}.$$

6. סדרה מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי.
7. מבחן לייבניץ להתכנסות טור מתחלף.
8. שקילות הגדרות הגבול של פונקציה בנקודה, לפי היינה ולפי קושי-בולצאנו.
9. לפונקציה מונוטונית יש גבולות חד-צדדיים בכל נקודה.
10. אריתמטיקה של פונקציות רציפות - כולל הרכבה
11. משפט ערך הביניים לפונקציות רציפות.

12. פונקציה מונוטונית וחסומה בקטע היא רציפה אם ורק אם קבוצת ערכיה היא קטע.
13. משפט ויירשטראס: פונקצייה רציפה בקטע סגור מקבלת מקסימום.
14. משפט קנטור: פונקצייה רציפה בקטע סגור רציפה בו במידה שווה.
15. הלמה של היינה-בורל.
16. משפט פרמה לגבי התאפסות הנגזרת בנקודה המקסימום.
17. משפטי רול, לגרנג', וקושי לגבי שתי פונקציות גזירות בקטע.
18. משפט דרבו לגבי תכונת ערך הביניים של הנגזרת.
19. כלל לופיטל: המקרה  $\infty/\infty$ , גבול סופי בנקודה.
20. הנוסחא לשארית של פאנו לפיתוח טיילור.
21. הנוסחות לשארית של לגרנז' וקושי לפיתוח טיילור.
22. פונקציה קמורה בקטע פתוח - רציפה בו.