א ו נ י ב ר ס י ט ת   ת ל   א ב י ב

הפקולטה למדעים מדוייקים ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

בית הספר למדעי המתמטיקה

נושאים בגיאומטריה קמורה אסימפטוטית

חיבור לשם קבלת תואר "דוקטור לפילוסופיה"

מאת

בועז קלרטג

נכתב בהנחיית

פרופסור ויטלי מילמן

הוגש לסנאט של אוניברסיטת תל-אביב

מאי 2004

לאיילת.

הוקרות

המחקר המתואר בתיזה זו בוצע בהנחייתו של פרופסור ויטלי מילמן. אני מודה מקרב לב על האפשרות שניתנה לי להשתתף במחקר המתמטי של פרופסור מילמן. עבודתי עימו הובילה לקפיצת מדרגה ברמת ההבנה המתמטית שלי. התרשמתי במיוחד מהגישה שלו למדע, מהחזון המתמטי, מהתובנות שאליהן הוא שואף להגיע, ומהדרך בה הוא בונה אינטואיציה מתמטית. השיחות שלנו היו מעוררות השראה עבורי. בנוסף, העידוד, האכפתיות והמחשבה שפרופסור מילמן העניק לי ולסטודנטים האחרים שלו הם יוצאי דופן בקרב פרופסורים.

ברצוני להודות גם לשני מורים שהשפיעו רבות על היחס שלי למתמטיקה בשלב מוקדם יותר. הראשון הוא דר' שוני דר, שממנו למדתי את האמנות של פתרון חידות ובעיות מתמטיות. השני הוא דר' חיים שפירא, שלימד אותי "מתמטיקה גבוהה" ובזכותו פניתי ללימודי מתמטיקה באוני-ברסיטה.

תקציר

חיבור זה עוסק בתופעות גיאומטריות שנובעות מריבוי מימדים. אדם בעל אינטואיציה גיאומטרית של מימד נמוך (2 או 3) עשוי לחשוב שגיאומטריה ב- $\mathbb{R}^n$, עבור n גדול, תהיה מסובכת למדי. הרי ככל שמספר המימדים עולה, מספר המבנים הגיאומטרים האפשריים גדל במהירות, המגוון עצום וקשה להכילו אפילו בדימיון, ונראה שתורה כללית ומעניינת, ובה משפטים התקפים לכל הגופים הרב מימדיים - היא כמעט בלתי אפשרית. התחושה הזו רק מתחזקת בעקבות הניסיון האינסוף-מימדי. בתורה של מרחבי בנך ממימד אינסופי, נמצאו דוגמאות נגדיות לתכונות לא מעטות. לכן, מראש, רמת הציפיות לגבי תורה גיאומטרית משמעותית הדנה בגופים כלליים במימד גבוה, נמוכה למדי.

בניגוד לכך, ישנו מוטיב חשוב בגיאומטריה רב מימדית, שמפצה על הקושי שבריבוי מספר המשתנים - תופעת ריכוז המידה. העובדה שלמידות רב מימדיות יש בדרך כלל הערכות ריכוז חזקות, מאפשרת להוכיח משפטים כלליים, שתקפים לכל הגופים הקמורים בכל המימדים הסופיים. לדוגמא, משפט דבורצקי הטוען שלכל גוף קמור ב- $\mathbb{R}^n$ יש חתכים ממימד $c\log n$ שדומים מאוד לכדור אוקלידי, או משפט מנת תת המרחב של מילמן, שלפיו לכל גוף קמור יש היטל של חתך (או חתך של היטל) ממימד פרופורציוני ל- n, שקרוב מאוד לאליפסואיד. כלומר, במקרים מסויימים, ריבוי המימדים או ריבוי הפרמטרים יוצר סדר ופשטות, ואינו עומד דווקא לרועץ.

גיאומטריה קמורה אסימפטוטית היא התורה העוסקת בגופים קמורים n-מימדיים, כשהמימד n שואף לאינסוף. בעוד המילה "אסימפטוטית" היא לב ליבה של התורה - חלק מהתוצאות קשה אפילו לנסח במימד קטן או קבוע - הרי שהמונח "קמור" הכרחי פחות. מטרתו היא בסך הכל לכפות מעט רגולריות על הצורות הגיאומטריות בהן אנו דנים. במקרים רבים, המשפטים תקפים גם תחת דרישות חלשות יותר מקמירות, כמו קוואזי-קמירות. חלק מהתוצאות תקפות - בניסוח מתאים - עבור קבוצות דיסקרטיות של נקודות, ולאו דווקא לגבי גופים קמורים בלבד (לדוגמא, חלק מהתוצאות לגבי סימטריזציות מינקובסקי שמוצגות כאן).

התיזה מחולקת לשלושה חלקים. החלק הראשון עוסק בשיטות סימטריזציה גיאומטריות. בהינתן $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור, ועל מישור $H \subset \mathbb{R}^n$ מגדירים את סימטריזציית שטיינר של K ביחס ל- H בתור הגוף היחיד $S_H(K)$ כך שלכל ישר l שמאונך ל- H מתקיים:

1. $S_H(K)\cap l$ הוא קטע סגור שמרכזו ב- H.

2. אורך הקטע $S_H(K)\cap l$ שווה לאורך הקטע $K\cap l$ (נשים לב ש- $K\cap l$ הוא קטע כי K קמור).

נסמן ב- π_H את אופרטור השיקוף ביחס ל- H ב- $\mathbb{R}^n$. סימטריזציית מינקובסקי של K ביחס ל- H היא הגוף

$$\tau_H(K) = \frac{K+\pi_H(K)}{2} = \left\{ \frac{x+y}{2}; x\in K, y\in \pi_H(K) \right\}$$

כשמתחילים מגוף קמור כלשהו, ומבצעים סדרת סימטריזציות (מינקובסקי או שטיינר), אפשר לקבל סדרת גופים ששואפת לכדור אוקלידי. בזכות זאת, שיטות סימטריזציה שימושיות למדי בהוכחת אי שיוויונים גיאומטרים שבהם הכדור האוקלידי הוא מקרה הקיצון. כאן, אנו מעוניינים לברר מהי המהירות של אותה ההתכנסות לכדור אוקלידי. בהינתן מימד n ו- $\varepsilon > 0$ אנו מעוניינים למצוא את המספר המינימלי $M(n,\varepsilon)$ (או $S(n,\varepsilon)$) כך שלכל גוף קמור $K \subset \mathbb{R}^n$ קיימות $M(n,\varepsilon)$ סימטריזציות מינקובסקי (או $S(n,\varepsilon)$ סימטריזציות שטיינר), שלאחר הפעלתן על K מתקבל הגוף $\tilde{K}$ שמקיים

$$(1-\varepsilon)rD \subset \tilde{K} \subset (1+\varepsilon)rD$$

עבור איזשהו $r > 0$, כאשר D הוא כדור היחידה האוקלידי ב- $\mathbb{R}^n$. בין השאר, אנו מוכיחים כאן את המשפט הבא:

משפט: קיים קבוע מספרי $c > 0$ כך שלכל מימד $n \geq 2$ ולכל $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ מתקיים

$$M(n,\varepsilon) < cn \log \frac{1}{\varepsilon}, \quad S(n,\varepsilon) < cn^4 \log^2 \frac{1}{\varepsilon}$$

בנוסף, קיים קבוע מספרי $c' > 0$, כך ש- $S(n,c') < 3n$ לכל מימד n.

ברור שלפחות n סימטריזציות בערך נדרשות כדי להפוך גוף כללי ב- $\mathbb{R}^n$ לגוף שקרוב לכדור אוקלידי או לאליפסואיד. הרי אם מבצעים פחות מ- n סימטריזציות, נותרים כיוונים בהם דבר לא השתנה. המשפט הבא מראה שהחסם התחתון הטריוויאלי הנ"ל הוא כמעט הדוק עבור סימ-טריזציית שטיינר.

משפט: לכל $\varepsilon > 0$ ולכל גוף קמור $K \subset \mathbb{R}^n$ קיימות $\lfloor (1+\varepsilon)n \rfloor$ סימטריזציות שטיינר, שהופכות את K לגוף $\tilde{K}$ כך שקיים אליפסואיד $\mathcal{E}$ ומתקיים

$$\frac{1}{c(\varepsilon)}\mathcal{E} \subset \tilde{K} \subset c(\varepsilon)\mathcal{E}$$

כאשר $c(\varepsilon)$ היא פונקציה של ε בלבד ו- $c(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ כאשר $\varepsilon \to 0$.

משפטים נוספים לגבי סימטריזציות מופיעים בחלק הראשון של התיזה. החלק השני עוסק ב-"השערת העל-מישור", שהיא אחת הבעיות הפתוחות המרכזיות בגיאומטריה קמורה אסימפטוטית. העיסוק בנושא צמח מתוך רעיונות בנושא סימטריזציות, שמתוארים בחלק הראשון. נסמן את ספירת היחידה ב- $S^{n-1} = \partial D$. לכל גוף קמור $K \subset \mathbb{R}^n$ שמרכז הכובד שלו בראשית הצירים, יש תמונה לינארית $\tilde{K}$ בעלת נפח יחידה, כך ש-

$$\int_{\tilde{K}} \langle x, \theta \rangle^2 dx \tag{1}$$

אינו תלוי בבחירת $\theta \in S^{n-1}$. במקרה כזה אומרים ש- $\tilde{K}$ הוא במצב איזוטרופי או ש- $\tilde{K}$ היא תמונה לינארית איזוטרופית של K. התמונה האיזוטרופית יחידה עד כדי העתקה אורתוגונלית. את הגודל

ב- (1), שכאמור אינו תלוי ב- $\theta \in S^{n-1}$, מסמנים ב- L_K^2. בזכות יחידות התמונה האיזוטרופית, עד כדי העתקה אורתוגונלית, לכל גוף קמור מוגדר L_K והוא נקרא הקבוע האיזוטרופי של הגוף K. אפשר לחשב אותו עבור לא מעט גופים. בכל המקרים שנבדקו, בכל המימדים, הקבוע האיזוטרופי קטן מ- $\frac{1}{e}$ (אסימפטוטית, $\frac{1}{e}$ הוא הקבוע האיזוטרופי של הסימפלקס) והוא תמיד גדול מ- $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$ (אסימפטוטית, הקבוע האיזוטרופי של הכדור האוקלידי). בעוד החסם התחתון לקבוע האיזוטרופי הוא קל להוכחה, הרי שאחת הבעיות הפתוחות המרכזיות בתחום היא למצוא קבוע $C > 0$ כך שלכל מימד n ולכל גוף קמור $K \subset \mathbb{R}^n$ מתקיים $L_K < C$. זוהי השערת העל-מישור. כדי להצדיק את שמה, נציג ניסוח שקול של הבעייה: האם לכל גוף קמור $K \subset \mathbb{R}^n$ בנפח יחידה, קיים חתך $n-1$ מימדי של K שניפחו גדול מ- $\frac{1}{1{,}000}$ או מקבוע אוניברסלי חיובי אחר? ההערכה הטובה ביותר הידועה היום היא $L_K < cn^{1/4}\log n$ עבור $K \subset \mathbb{R}^n$ (הוכח על ידי בורגיין). עבור משפחות נרחבות של גופים קמורים, ידוע שהשערה נכונה.

אנו מציגים כאן רדוקציה של הבעייה. במקום לחסום את הקבוע האיזוטרופי של גוף קמור כללי, מספיק לחסום את הקבוע של גופים בעלי "יחס נפח חסום". עבור $K \subset \mathbb{R}^n$ מגדירים את יחס הנפח בתור

$$v.r.(K) = \sup_{\mathcal{E} \subset K} \left(\frac{Vol(K)}{Vol(\mathcal{E})} \right)^{1/n}$$

כשהסופרימום הוא על כל האליפסואידים שמוכלים ב- K. גופים בעלי יחס נפח קטן יחסית הם בעלי תכונות גיאומטריות נעימות. ידוע, למשל, שרוב החתכים ממימד פרופורציוני שלהם קרובים לכדור אוקלידי (אולי אחרי העתקה לינארית). המשפט הבא מוכח בעזרת שיטות סימטריזציה:

משפט: קיים $v > 1$ בעל התכונה הבאה:
אם קיים $c_1 > 0$ כך שלכל מימד n ולכל גוף קמור $K \subset \mathbb{R}^n$ שמקיים $v.r.(K) < v$ מתקיים גם ש- $L_K < c_1$,
אז קיים $c_2 > 0$ כך שלכל מימד n ולכל גוף $K \subset \mathbb{R}^n$ מתקיים ש- $L_K < c_2$.

בנוסף, אנו דנים כאן גם בגרסא איזומורפית של השערת העל-מישור. אנו מראים שאוסף הגו-פים הקמורים בעלי קבוע איזוטרופי חסום הוא "צפוף" במידה מסויימת במרחב הגופים הקמורים. בהינתן $K, T \subset \mathbb{R}^n$ קמורים וסימטריים ביחס לראשית (כלומר, $K = -K, T = -T$), נגדיר את מרחק בנך-מזור ביניהם כ-

$$d(K,T) = \inf \left\{ ab; \frac{1}{b}K \subset LT \subset aK; a, b > 0,\ L \ is \ a \ linear \ operator \right\}$$

ידוע, למשל, משפט John שלפיו $d(K,D) \le \sqrt{n}$ לכל גוף קמור ב- $\mathbb{R}^n$. אם נתונות שתי משפחות של גופים $K_n, T_n \subset \mathbb{R}^n$ כך שמתקיים $d(K_n, T_n) < C$ עבור קבוע C שאינו תלוי במימד, אומרים שהמשפחות הן "איזומורפיות" (מרחבי הבנך שהגופים משרים הם איזומורפים באופן אחיד). אנו מראים שהשערת העל-מישור תקפה, אם ניתן להחליף את הגוף בו דנים בגוף איזומורפי לו, עד כדי גורם לוגריתמי.

משפט: לכל גוף קמור וסימטרי ביחס לראשית $K \subset \mathbb{R}^n$ קיים גוף קמור וסימטרי $T \subset \mathbb{R}^n$ כך ש- $d(K,T) < c_1 \log n$ וכך ש-

$$L_T < c_2$$

כאשר $c_1, c_2 > 0$ הם קבועים מספריים אוניברסלים.

בנוסף, עבור גופים קמורים עם type לא טריביאלי, הגורם הלוגריתמי במשפט מיותר. נושא נוסף שנידון בחלק השני הוא הקשר בין השערת העל-מישור ובעיית הסימטריזציה המהירה של גופים קמורים. לקובייה ה- n מימדית יש תכונה מעניינת: קיימות רק $\lfloor \frac{n}{10} \rfloor$ סימטריזציות שטיינר, שהופכות את הקובייה לגוף שמרחקו מכדור אוקלידי חסום על ידי קבוע אבסולוטי. המספר $\frac{1}{10}$, כמובן, חסר משמעות מיוחדת, וניתן להחליפו בכל $0 < \varepsilon < 1$. נשים לב שכאשר מבצעים הרבה פחות מ- n סימטריזציות שטיינר, נותרים היטלים בעלי מימד גבוה ללא שינוי, שכן הסימטריזציות כלל לא השפיעו עליהם. לכן, עבור גוף קמור כללי, אין לצפות לתהליך סימטריזציה קצר כל כך.

מה שעשוי להיות נכון, הוא שלגוף קמור כללי יש תהליך סימטריזציה קצר אחרי "ניתוח" שמסלק חלק קטן מהגוף. כלומר, נביט במשפחת הגופים הקמורים $K \subset \mathbb{R}^n$ כך שקיים תת-גוף קמור $T \subset K$ עם $Vol(T) > \frac{9}{10} Vol(K)$ כך שהרבה פחות מ- n סימטריזציות מספיקות כדי להפוך את T לגוף שהוא קרוב לאליפסואיד. אנו מראים כאן שמשפחת הגופים הנ"ל מכילה את כל הגופים הקמורים אם ורק אם השערת העל מישור נכונה.

בחלק השלישי של התיזה אנו דנים בשני נושאים נוספים. אנו מציגים אי שיוויון גיאומטרי בנוגע לקוטר של חתכים אקראיים של גופים קמורים. עבור T, גוף k- מימדי, מסמנים

$$v.rad.(T) = \left(\frac{Vol(T)}{Vol(D)} \right)^{1/k}$$

כלומר, $v.rad.(T)$ הוא הרדיוס של הכדור ה- k מימדי שלו אותו הנפח כמו ל- T. נסמן גם $diam(T) = \sup_{x,y \in T} |x-y|$.

משפט: יהי $0 \in K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור. יהי $k = \lambda n$ מספר שלם בין 1 ל- n, ונבחר באקראי תת מרחב $E \in G_{n,k}$ (ביחס למידת Haar על הגרסמניאן). אזי בהסתברות גדולה מ- $1 - e^{-n}$,

$$diam(K \cap E)^{1-\lambda} v.rad.(K \cap E)^{\lambda} < C v.rad.(K)$$

כאשר $C > 0$ הוא קבוע מספרי.

הוכחת המשפט קצרה ואלמנטרית, ומשתמשת בעיקר באינטגרציה ביחס לקואורדינטות קו-טביות. למשפט כמה מסקנות מעניינות, לדוגמא העובדה הידועה שלגוף בעל יחס נפח חסום יש חתכים ממימד פרופורציוני שקרובים לכדור אוקלידי, וגם כמה מסקנות לא ידועות. עבור $x \in \mathbb{R}^n$ נסמן $\|x\| = \inf\{\lambda > 0; \frac{x}{\lambda} \in K\}$ ונגדיר $M(K) = \int_{S^{n-1}} \|x\| d\sigma(x)$ כאשר σ היא מידת ההסתברות היחידה על הספירה שאינווריאנטית לסיבובים. אזי בסיכוי גדול מאוד, תת מרחב אקראי ממימד λn מקיים

$$diam(K \cap E) < (cM(K))^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} v.rad.(K)^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

כאשר $c > 0$ הוא קבוע מספרי. זהו אי-שיוויון שמזכיר את ה- Low M^* estimate, אך מערב את הפרמטר הדואלי: $M(K)$. ייתכן ואי השיוויון דלעיל יתברר כשימושי, שכן ה- Low M^* estimate הוא אי שיוויון מרכזי בתורה הגיאומטרית הרב-מימדית.

הנושא האחרון שמוצג בתיזה קשור לאליפסואיד John. יהי $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור וסימטרי ביחס לראשית. נסמן ב- $\mathcal{E} \subset K$ את האליפסואיד (היחיד) בעל הנפח המקסימלי המוכל ב- K. אליפסואיד זה נקרא האליפסואיד של Löwner-John. ניתן לאפיין את האליפסואיד בעזרת נקודות המגע של עם K. למשל, $D \subset K$ הוא אליפסואיד John של K אם ורק אם קיימת מידה ν שנתמכת על $\partial K \cap S^{n-1}$ כך שמטריצת השונות שלה היא מטריצת הזהות.

אנו מציגים הוכחה פשוטה של האיפיון דלעיל באמצעות משפט הדואליות של התכנות הלינארי. בנוסף, אנו מוכיחים את הטענה הבאה:

טענה: יהי $K \subset \mathbb{R}^n$ גוף קמור וסימטרי ביחס לראשית. אזי קיים אליפסואיד $\mathcal{E} \subset K$ יחיד כך שקיימת מידה ν הנתמכת על $\partial K \cap \partial \mathcal{E}$ ומטריצת השונות שלה היא מטריצת הזהות.

כלומר, בהינתן מבנה אוקלידי כלשהו על $\mathbb{R}^n$, מקבלים אליפסואיד מיוחד שקשור ל- K. בעצם, מקבלים כך העתקה מאליפסואידים לאליפסואידים, שהגוף K משרה. אנו מראים שהעתקה זו היא רציפה, שהיא מאפיינת את הגוף K, ושאליפסואיד John הוא נקודת השבת היחידה שלה.