חדו"א 1א - מבחן מועד א' - תקצירי פתרונות

<u>שאלה 2:</u> תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית, בעלת מחזור $T>0$. הוכיחו כי קיימות $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ עם $|x_1-x_2|=\frac{T}{2}$ כך ש $f(x_1)=f(x_2)$.

<u>פתרון:</u> אם $f(0)=f\left(\frac{T}{2}\right)$ נבחר $x_1=0,\ x_2=\frac{T}{2}$. אחרת נניח כי $f(0)>f\left(\frac{T}{2}\right)$ (המקרה השני דומה), נגדיר את הפונקציה $g:\left[0,\frac{T}{2}\right]\to\mathbb{R}$ ע"י $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{T}{2}\right)$. מהנתון g רציפה (הפרש והרכבה של פונקציות רציפות), $g(0)>0$ ובנוסף לפי מחזוריות של f:

$$g\left(\frac{T}{2}\right)=f\left(\frac{T}{2}\right)-f(T)=f\left(\frac{T}{2}\right)-f(0)<0$$

לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $x_1\in\left(0,\frac{T}{2}\right)$ כך ש $g(x_1)=0$ ולכן $f(x_1)=f\left(x_1+\frac{T}{2}\right)$, ואם נגדיר
$x_2=x_1+\frac{T}{2}$ נקבל את מה שצריך.

<u>שאלה 3:</u> נתון ש f גזירה ב $\mathbb{R}$, $f(0)=0$ ו $|f'(x)|<1$ לכל $x\in(0,1)$. הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}f^2\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)$$

מתכנס.

<u>פתרון:</u> ראשית ניעזר במשפט לגרנז' כדי להוכיח כי לכל $x>0$ מתקיים $|f(x)|<x$. הפונקציה f גזירה ב $\mathbb{R}$ ולכן רציפה ולכן מתקיימים תנאי המשפט בקטע $[0,x]$. לכן קיימת נקודה $\xi\in(0,x)$ כך שמתקיים:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{x}\right|<1\Rightarrow|f(x)|<x$$

לפי משפט ההשוואה הראשון להתכנסות של טורים חיוביים ($f^2\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)\geq 0$), מתקיים כי הטור הנתון מתכנס אם הטור הבא מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$$

ראינו בהרצאה/תרגול כי מכיוון ש $\frac{4}{3}>1$ הטור הנ"ל מתכנס.

סקיצה לפתרון של שאלה 4

סעיף א'. נתון ש־f מוגדרת בסביבת a וגזירה ב־a, וכן $f(a)=5,\ f'(a)=2$. חשבו את

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$$

ישנן כמה דרכים לפתור. דרך אחת היא הבאה:

$$\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n=\left(1+\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}\right)^n=$$
$$\left[\left(1+\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}\right)^{\frac{f(a)}{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}}\right]^{n\cdot\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}}$$

הבסיס של הביטוי האחרון שואף ל־ e, כיוון שהסדרה $b_n=\frac{f(a)}{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}$ שואפת ל־$+\infty$ (שימו לב שהמונה שלה קבוע, והמכנה שלה שואף ל־$0+$ כיוון שבסביסת a הפונקציה שלנו עולה, שהרי $f'(a)>0$).

המעריך הוא

$$n\cdot\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}=\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}\cdot f(a)}\to\frac{f'(a)}{f(a)}=\frac{2}{5}$$

כאשר $n\to\infty$ (הגדרת הנגזרת).

כיוון שהבסיס והמעריך שואפים לגבולות חיוביים סופיים, התשובה היא פשוט גבול הבסיס בחזקת גבול המעריך, כלומר $e^{2/5}$ (הוכחה מקוצרת: אם $x_n\to x,\ y_n\to y$ כש־ $0<x,y<\infty$, אז: $\lim_{n\to\infty}x_n^{y_n}=\lim_{n\to\infty}e^{y_n\ln x_n}=e^{\lim_{n\to\infty}y_n\ln x_n}=e^{y\ln x}=x^y$).

דרך שניה לסעיף זה, היא לקרב את המונה בעזרת פולינום טיילור מסדר ראשון, אך לא לשכוח את השארית:

$$f(a+\frac{1}{n})=f(a)+\frac{1}{n}f'(a)+R_1(a+\frac{1}{n})$$

כאשר ידוע כי $R_1(a+\frac{1}{n})=o(\frac{1}{n})$ כש־ $n\to\infty$. נקבל:

$$\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n=\left(\frac{f(a)+\frac{1}{n}f'(a)+o(\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n=\left(1+\frac{\frac{1}{n}(f'(a)+o(1))}{f(a)}\right)^n$$

מכאן אפשר להמשיך בשיטה דומה לדרך הראשונה ("לסדר" את החזקה) ולקבל שהגבול הוא $e^{f'(a)/f(a)}=e^{2/5}$.

דרך שלישית, היא:

$$\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n=\exp\left(n\cdot\ln\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)=$$
$$\exp\left(\frac{\ln(f(a+\frac{1}{n}))-\ln(f(a))}{\frac{1}{n}\cdot f(a)}\right)\to\exp\left[\ln(f(x))\right]'|_{x=a}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

זה נובע פשוט מהגדרת הנגזרת.

לבסוף, שימו לב שאסור לעשות לופיטל, כי נתונה גזירות רק בנקודה a ולא בסביביתה. ואם כבר עושים לופיטל, יש להקפיד לגזור נכון לפי המשתנה $x = n$.

סעיף ב'. האם הפונקציה $f(x) = x^{2/3}\ln(x)$ רציפה ב־$(1,\infty)$?

התשובה היא כן. ראשית, אין בעיה להרחיב את הפונקציה לנקודה $x = 1$ באופן רציף, כי $\lim_{x\to 1+} x^{2/3}\ln(x) = 1\cdot 0 = 0$.

מחשבים את הנגזרת, ורואים כי $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ (יש צורך בלופיטל אחד). מהגדרת הגבול עבור $\epsilon = 1$, קיים M עבורו $|f'(x)| < 1$ לכל $x \geq M$. בקטע $[M,\infty)$ הנגזרת חסומה, ולכן יש רציפות במידה שווה (טענה מהתרגול).

בקטע $[1,M]$ יש רציפות במ"ש לפי משפט קנטור (זו פונקציה רציפה בקטע חסום וסגור). לפיכך יש רציפות במ"ש גם באיחוד $[1,M]\cup[M,\infty) = [1,\infty)$ (טיעון הדבקת קטעים הופיע כמה פעמים בתרגול ובשיעור, ניתן לצוטט גם אותו).

פתרון תרגיל 5 במועד א'

א') נשתמש בהגדרת הנגזרת להראות שהפונקציה גזירה ב $x=0$ ושמתקיים $f'(0)=0$.
מהנתון נובע ש $|f(0)| \le |\sin^3(0)| = 0$, ולכן $f(0)=0$. מהגדרת הנגזרת נקבל:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

כעת, נשתמש בנתון, ובגבול $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$, ונקבל:

$$0 \le \left|\frac{f(h)}{h}\right| \le \left|\frac{\sin^3(h)}{h}\right| = \left|\frac{\sin(h)}{h}\right| \left|\sin^2(h)\right| \xrightarrow{h\to 0} 0$$

ממשפט הסנדוויץ' נסיק ש $\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)}{h}\right| = 0$ ולכן $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$. מש"ל.

ב') נתון כעת שהפונקציה f גזירה פעמיים בנקודה $x=0$. ממשפט פאנו נובע ש:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)$$

מכיוון ש $f(0)=f'(0)=0$, נקבל שעבור $x\neq 0$ מתקיים:

$$\frac{1}{2}f''(0) = \frac{f(x)}{x^2} - \frac{o(x^2)}{x^2} \qquad (1)$$

בדומה לסעיף א', נקבל: $0 \le \left|\frac{f(x)}{x^2}\right| \le \left|\frac{\sin^3(x)}{x^2}\right| = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\left|\sin(x)\right| \xrightarrow{x\to 0} 0$, ולכן ממשפט הסנדוויץ' נובע ש: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0$. כמו כן, מההגדרה נובע ש: $\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}\to 0$.
כעת, נקח את הגבול ב (1) כאשר $x\to 0$, ומאריתמטיקה של גבולות נסיק ש: $f''(0)=0$.

ג') הטענה איננה נכונה. נתבונן למשל בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x})\sin^3(x) & \text{if } x=0, \\ 0 & \text{if } x=0. \end{cases}$$

מההגדרה של f ומהעובדה ש: $|\sin(\alpha)| \le 1$ נובע ש $|f(x)| \le |\sin^3(x)|$. בנוסף מתקיים:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\sin^2(h)\sin(\frac{1}{h}) = 0,$$

כאשר הגבול באחרון נובע מהעובדה ש: $|\sin(\frac{1}{h})| \le 1$, וממשפט הסנדוויץ'. אם כן מתקיים:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2}\cos(\frac{1}{x})\sin^3(x) + 3\sin^2(x)\cos(x)\sin(\frac{1}{x}) & \text{if } x=0, \\ 0 & \text{if } x=0. \end{cases}$$

הפונקציה $f'(x)$ גזירה בסביבה מנוקבת של $x=0$ אבל לא בנקודה $x=0$. אמנם:

$$f''(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-1}{h^2}\cos(\frac{1}{h})\sin^3 h + 3\sin^2(h)\cos(h)\sin(\frac{1}{h})}{h} \qquad (2)$$

נשים לב שהגבול $\lim_{h\to 0}\cos(\frac{1}{h})$ לא קיים, ולכן מאריתמטיקה של גבולות (בדרך השלילה) נובע שהגבול $\lim \frac{\frac{-1}{h^2}\cos(\frac{1}{h})\sin^3(h)}{h}$ לא קיים, ולכן (שוב מאריתמטיקה) הגבול (2) לא קיים.