חדו"א 1 ־ תרגיל בית מס' 10 ־ פתרונות חלקיים

19 בדצמבר 2010

1. חשבו את הנגזרות של הפונקציות הבאות (ציינו תחום הגדרה של הנגזרת):

- $\sin(e^x)$
  <u>פתרון:</u> תחום הגדרה: $\mathbb{R}$. $(\sin(e^x))' = e^x \cos(e^x)$
- $\log\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)$
  <u>פתרון:</u> תחום הגדרה: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$.

$$\left(\log\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)\right)' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{x-\sqrt{1-x^2}}$$

- $(\log x)^\alpha$
  <u>פתרון:</u> נניח $\alpha \neq 0$. תחום הגדרה: אם $\alpha = \frac{p}{q}$ כאשר q אי־זוגי: כאשר $\alpha \geq 1$: $(0,\infty)$, כאשר $\alpha < 1$: $(0,\infty)\setminus\{1\}$. עבור ערכי α אחרים: $(1,\infty)$.

$$((\log x)^\alpha)' = \frac{\alpha(\log x)^{\alpha-1}}{x}$$

- x^{x^x}
  <u>פתרון:</u> תחום הגדרה: $x > 0$. מתקיים $(x^x)' = \left(e^{x\log x}\right)' = x^x(1+\log x)$
  לכן:

$$\left(x^{x^x}\right)' = \left(e^{x^x \log x}\right)' = x^{x^x}(x^x \log x)' = x^{x^x}\left(x^x(1+\log x)\log x + x^{x-1}\right)$$

- $\arctan\left(-\log^2 x\right)$
  <u>פתרון:</u> תחום הגדרה: $x > 0$.

$$\left(\arctan\left(-\log^2 x\right)\right)' = \frac{\left(-\log^2 x\right)'}{1+\log^4 x} = -\frac{2\log x}{x\left(1+\log^4 x\right)}$$

2. חשבו את הנגזרות של הפונקציות הבאות: (ציינו תחום הגדרה)

- $\sqrt{|x|}$ כאשר $x \in \mathbb{R}$
<u>פתרון:</u> מקבלים כאשר $x \neq 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & , \quad x > 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{-x}} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

בנקודה $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \infty \\ f'_-(0) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{-h} - 0}{h} = -\infty \end{aligned}$$

ולכן לא קיימת נגזרת ב 0.

- $\lfloor x^2 \rfloor \sin^2(\pi x)$ כאשר $x \geq 0$
<u>פתרון:</u> כאשר $x \in \left(\sqrt{n}, \sqrt{n+1}\right)$ מקבלים: $f'(x) = 2\pi n \sin(\pi x) \cos(\pi x) =$ $\pi n \sin(2\pi x)$. בנק' $x = \sqrt{n}$ ו $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f'_+\left(\sqrt{n}\right) &= \lim_{x \to \sqrt{n}^+} \frac{n \sin^2(\pi x) - n \sin^2\left(\pi \sqrt{n}\right)}{x - \sqrt{n}} = n\pi \sin\left(2\pi\sqrt{n}\right) \\ f'_-\left(\sqrt{n}\right) &= \lim_{x \to \sqrt{n}^-} \frac{(n-1)\sin^2(\pi x) - n \sin^2\left(\pi\sqrt{n}\right)}{x - \sqrt{n}} = \\ &= \lim_{x \to \sqrt{n}^-} \left[\frac{n \sin^2(\pi x) - n \sin^2\left(\pi\sqrt{n}\right)}{x - \sqrt{n}} - \frac{\sin^2(\pi x)}{x - \sqrt{n}}\right] \end{aligned}$$

כלומר $f'_-\left(\sqrt{n}\right) = f'_+\left(\sqrt{n}\right) = f'\left(\sqrt{n}\right) = n\pi \sin\left(2\pi\sqrt{n}\right)$ כאשר $\sqrt{n} =$ $k \in \mathbb{N}$, אחרת $f'\left(\sqrt{n}\right)$ לא קיים.

- $\left\{x^2\right\} \sin^2(\pi x)$ כאשר $x \geq 0$ ($\{x\}$ מסמן את החלק השברי של x - כלומר $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$)
<u>פתרון:</u> מתקיים כי $x^2 \sin^2(\pi x) = \lfloor x^2 \rfloor \sin^2(\pi x) + \left\{x^2\right\} \sin^2(\pi x)$ מכיוון ש:

$$\left(x^2 \sin^2(\pi x)\right)' = \pi x^2 \sin(2\pi x) + 2x \sin^2(\pi x)$$

לפי התרגיל הקודם מקבלים כי הנגזרת לא קיימת בנק' $\sqrt{n}$ כאשר $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ ואחרת:

$$\left(\left\{x^2\right\} \sin^2(\pi x)\right)' = \begin{cases} 0 & , \quad x = \sqrt{n} \in \mathbb{N} \\ \pi \sin(2\pi x)\left(x^2 - n\right) + 2x \sin^2(\pi x) & , \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

3. נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^{2}\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| & ,\,x\neq0\\ 0 & ,\,x=0 \end{cases}$$

הראו כי $f\left(x\right)$ אינה גזירה בנקודות $x_{n}=\frac{2}{n+1}$ לכל $n\in\mathbb{Z}$ וכי $f\left(x\right)$ גזירה בנקודה 0 (שהיא נקודת גבול של $\left\{ x_{n}\right\}$).

<u>פתרון:</u> לפי הגדרת הנגזרת

$$f'\left(0\right)=\lim_{h\rightarrow0}\frac{f\left(h\right)-f\left(0\right)}{h}=\lim_{h\rightarrow0}h\left|\cos\frac{\pi}{h}\right|=0$$

לכל נקודה $x_{n}=\frac{2}{n+1}$ נראה כי הנגזרות החד צדדיות שונות, ולכן לא קיימת בהן נגזרת. מכיוון שהפונקציה זוגית מספיק לבדוק עבור $n\in\mathbb{N}$.עבור $n=2k$ נשים לב כי $\cos\frac{\pi}{x}$ חיובית מצד ימין של x_{n} ושלילית מצד שמאל. לכן מקבלים:

$$\begin{aligned} f'_{+}\left(x_{n}\right) & = & \lim_{x\rightarrow x_{n}^{+}}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_{n}\right)}{x-x_{n}}=\lim_{x\rightarrow x_{n}^{+}}\frac{x^{2}\cos\frac{\pi}{x}}{x-x_{n}}=\left(x^{2}\cos\frac{\pi}{x}\right)'\Big|_{x=x_{n}}=\pi\\ f'_{+}\left(x_{n}\right) & = & \lim_{x\rightarrow x_{n}^{-}}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_{n}\right)}{x-x_{n}}=-\lim_{x\rightarrow x_{n}^{-}}\frac{x^{2}\cos\frac{\pi}{x}}{x-x_{n}}=-\left(x^{2}\cos\frac{\pi}{x}\right)'\Big|_{x=x_{n}}=-\pi \end{aligned}$$

מכיוון ש $\left(x^{2}\cos\frac{\pi}{x}\right)'=-x^{2}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{x^{2}}\right)+2x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)=\pi\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)+2x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$. באופן דומה עבור $n=2k-1$ מקבלים:

$$\begin{aligned} f'_{+}\left(x_{n}\right) & = & \pi\\ f'_{+}\left(x_{n}\right) & = & -\pi \end{aligned}$$

4. נגדיר את הפונקציה הבאה: ($\alpha,\beta>0$)

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^{\beta}\sin\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right) & ,\,x\neq0\\ 0 & ,\,x=0 \end{cases}$$

מצאו עבור אילו ערכים של α,β הפונקציה $f\left(x\right)$ רציפה/גזירה/גזירה ברציפות/גזירה פעמיים בנקודה 0.

<u>פתרון:</u> מכיוון ש $\sin\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)$ חסומה לכל α, הפונקציה $f\left(x\right)$ רציפה כאשר $\beta>0$. לפי הגדרת הנגזרת בנקודה 0:

$$f'\left(0\right)=\lim_{h\rightarrow0}\frac{f\left(h\right)-f\left(0\right)}{h}=\lim_{h\rightarrow0}h^{\beta-1}\sin\left(\frac{1}{h^{\alpha}}\right)$$

הגבול קיים (ושווה ל 0) כאשר $\beta>1$. הנגזרת של $f\left(x\right)$ בכל נקודה מלבד 0 היא:

$$f'\left(x\right)=\beta x^{\beta-1}\sin\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)-\alpha x^{\beta-\alpha-1}\cos\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)$$

הנגזרת רציפה ב 0, כאשר מתקיים:

$$0 = f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x)$$

כלומר כאשר $\beta - \alpha - 1 > 0$ כלומר כאשר $\beta > \alpha + 1$.
לפי הגדרת הנגזרת השנייה ב 0:

$$f''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\beta h^{\beta - 2} \sin\left(\frac{1}{h^\alpha}\right) - \alpha h^{\beta - \alpha - 2} \cos\left(\frac{1}{h^\alpha}\right) \right]$$

הגבול קיים כאשר $\beta - \alpha - 2 > 0$, לכן במקרה זה צריך להתקיים $\beta > \alpha + 2$.

5. הוכיחו את הטענות בסעיפים א' וב':

(א) תהי f פונקציה גזירה בנק' x, אזי מתקיים:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

<u>פתרון:</u> נשים לב כי

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{1}{2} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right)$$

לכן

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} &= \frac{1}{2} \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(f'(x) + \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{-h} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(2f'(x) \right) = f'(x) \end{aligned}$$

(ב) $\bigstar$ תהי f פונקציה גזירה פעמיים בנק' x, אזי מתקיים:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

<u>פתרון:</u> נניח בה"כ כי $x = 0$. נשים לב שמספיק להוכיח את הטענה הבאה (*):
לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|h| < \delta$ מתקיים:

$$\left| f(h) - f(0) - f'(0) \cdot h - f''(0) \cdot \frac{h^2}{2} \right| < \epsilon h^2$$

אם נגדיר את פונקציית העזר $g(x) = f(x) - f(0) - f'(0)x - f''(0) \cdot \frac{x^2}{2}$
נקבל כי מתקיים $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$, ונשאר להוכיח כי לכל $\epsilon > 0$
קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|x| < \delta$ מתקיים $|g(x)| < \epsilon x^2$. מכיוון ש g גזירה פעמיים
ב 0 נובע כי g' קיימת בסביבה של 0 (כלומר g רציפה בסביבה של 0). לכן

בסביבה קטנה מספיק של 0 מתקיימים התנאים עבור משפט לגרנז'. לכן קיים c בין 0 ל x כך ש:

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(c) \Rightarrow g(x) = g'(c)\cdot x$$

בנוסף מכיוון ש g גזירה פעמיים ב 0 מתקיים כי לכל $\epsilon > 0$ נתון קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x| < \delta$ אזי $\left|\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0} - g''(0)\right| < \epsilon \Rightarrow |g'(x)| < \epsilon |x|$, בסה"כ קיבלנו כי אם $|x| < \delta$ אזי:

$$|g(x)| = |g'(c)|\cdot|x| \le \epsilon\,|c|\cdot|x| \le \epsilon x^2$$

(*) מקבלים:

$$\left|f(h) - 2f(0) + f(-h) - f''(0)\,h^2\right| < 2\epsilon h^2$$

ולכן

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-2f(0)+f(-h)}{h^2} = f''(0)$$

(ג) תנו דוגמא לפונקציה עבורה קיים הגבול בסעיף א' בנקודה מסוימת, אבל הפונקציה לא גזירה בנקודה.
<u>פתרון:</u> אפשר לבחור למשל את $f(x) = |x|$ בנקודה 0.

6. תהי f פונקציה גזירה n פעמים בקטע (a,b). נתון כי קיימות נק' $x_0,\ldots,x_n \in (a,b)$ כך ש $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n)$. הוכיחו כי קיימת נק' $c\in(a,b)$ כך ש $f^{(n)}(c) = 0$.
<u>פתרון:</u> ההוכחה באינדוקציה על n. המקרה $n=1$ נובע ממשפט רול. נניח נכונות עבור n ונוכיח עבור $n+1$. נתון כי f גזירה $n+1$ פעמים בקטע (a,b) וקיימות $n+2$ נק' כך ש $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_{n+1})$, לפי משפט רול בכל קטע (x_k, x_{k+1}) קיימת נק' y_k כך ש $f'(y_k) = 0$ (סה"כ $n+1$ נקודות). כלומר הנחת האינדוקציה מתקיימת עבור f' ולכן קיימת נק' $c\in(a,b)$ כך ש $(f')^{(n)}(c) = 0$ כלומר $f^{(n+1)}(c) = 0$.

7. נתון כי $f''(x) = a \in \mathbb{R}$ לכל $x\in(y,z)$. הוכיחו כי קיימים מספרים $b,c\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x) = \frac{a}{2}\cdot x^2 + bx + c$ לכל $x\in(y,z)$. הראו שהטענה איננה נכונה בהכרח אם ידוע כי $f''(x) = a$ בקבוצה שאיננה קטע.
<u>פתרון:</u> לפי מה שראינו בתרגול קיים $b\in\mathbb{R}$ כך ש $f'(x) = ax + b$. נסתכל על הפונקציה: $g(x) = f(x) - \frac{a}{2}\cdot x^2 - bx$, מתקיים:

$$g'(x) = f'(x) - ax - b \equiv 0$$

לכן קיים קבוע $c\in\mathbb{R}$ כך ש $g(x) = c$ כלומר $f(x) = \frac{a}{2}\cdot x^2 + bx + c$.

8. הוכיחו את אי־השיוויונות הבאים:

(א) $\frac{1}{\cos^2\beta} < \frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha} < \frac{1}{\cos^2\alpha}$ לכל $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$.

<u>פתרון:</u> ידוע כי $\cos x$ היא פונקציה חיובית ומונוטונית יורדת (ממש) ב $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
לפי משפט לגרנז' קיימת $c\in(a,b)$ כך ש:

$$\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\cos^2 c}$$

ולפי מונוטוניות:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}<\frac{1}{\cos^2 c}<\frac{1}{\cos^2\beta}$$

(ב) $x^\alpha-\alpha x\le 1-\alpha$ לכל $x\ge 0$ ו $0<\alpha<1$.

<u>פתרון:</u> כאשר $x=1$ נקבל שיוויון. כאשר $x>1$ אי־השיוויון הנתון שקול לאי־השיוויון הבא:

$$x^\alpha-1\le\alpha x-\alpha \iff \frac{x^\alpha-1}{x-1}\le\alpha$$

לפי משפט לגרנז' (עבור $f(x)=x^\alpha$) קיימת נק' $c\in(1,x)$ כך ש:

$$\frac{x^\alpha-1}{x-1}=\alpha c^{\alpha-1}$$

מכיוון ש $c>1$ ו $\alpha-1<0$ נקבל כי $c^{\alpha-1}<1$ ולכן קיבלנו את הדרוש.
ההוכחה במקרה $x<1$ דומה.

9. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) $\left(e^x\sin x\right)^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{4}\right)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ו $n\ge 1$

<u>פתרון:</u> ההוכחה באינדוציה על n, $n=0$ מיידי. נניח נכונות הטענה עבור n ונוכיח עבור $n+1$:

$$\begin{aligned}\left(e^x\sin x\right)^{(n+1)} &= \left(\left(e^x\sin x\right)^{(n)}\right)'\overset{i.h.}{=}\left(2^{\frac{n}{2}}e^x\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)'=\\ &= 2^{\frac{n}{2}}\left[e^x\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{4}\right)+e^x\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right]=\\ &= 2^{\frac{n}{2}}e^x\left(\sqrt{2}\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=2^{\frac{n+1}{2}}e^x\sin\left(x+\frac{(n+1)\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

כאשר נעזרנו בזהות הטריגונומטרית: $\sin(a)+\cos(a)=\sqrt{2}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$

(ב) $\left(x^n\log x\right)^{(n)}=n!\left(\log x+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$ לכל $x>0$ ו $n\ge 1$

<u>פתרון:</u> ניתן להוכיח באינדוקציה בדומה לסעיף הקודם.

10. הוכיחו כי הפונקציות הבאות רציפות במ"ש בתחומים הנתונים:

- $f(x) = \arctan x$ בכל $\mathbb{R}$
<u>פתרון:</u> מתקיים כי $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ לכן הנגזרת של $f(x)$ חסומה ו f רציפה במ"ש ב $\mathbb{R}$.
- $f(x) = \log\left(1+x^2\right)$ בתחום $[0,\infty)$
<u>פתרון:</u> מתקיים כי $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ לכן הנגזרת של $f(x)$ חסומה ב $[0,\infty)$ ו f רציפה במ"ש ב $[0,\infty)$.

11. נתון כי $a_1,\ldots,a_n$ הם מספרים ממשיים שונים מ 0 וכי $b_1,\ldots,b_n$ הם מספרים ממשיים כך ש $b_j \neq b_k$ לכל $j \neq k$. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) למשוואה הבאה יש לכל היותר $n-1$ שורשים ב $(0,\infty)$:

$$a_1 x^{b_1} + a_2 x^{b_2} + \ldots + a_n x^{b_n} = 0$$

<u>פתרון:</u> נוכיח את נכונות הטענה באינדוקציה על n. כאשר $n=1$ למשוואה $ax^b = 0$ אין פתרונות ($a \neq 0$). נניח נכונות הטענה עבור n ונוכיח אותה עבור $n+1$. את המשוואה

$$a_1 x^{b_1} + a_2 x^{b_2} + \ldots + a_{n+1} x^{b_{n+1}} = 0$$

ניתן לרשום מחדש באופן הבא (נשים לב כי $x > 0$):

$$a_1 + a_2 x^{b_2 - b_1} + \ldots + a_{n+1} x^{b_{n+1} - b_1} = 0$$

אם נניח בשלילה כי למשוואה הנ"ל יש יותר מ n פתרונות, אזי לפי משפט רול למשוואה הבאה יש לפחות n פתרונות:

$$a_2\left(b_2 - b_1\right) x^{b_2 - b_1 - 1} + \ldots + a_{n+1}\left(b_{n+1} - b_1\right) x^{b_{n+1} - b_1 - 1} = 0$$

וזאת בסתירה להנחת האינדוקציה.

(ב) למשוואה הבאה יש לכל היותר $n-1$ שורשים ב $\mathbb{R}$:

$$a_1 e^{b_1 x} + a_2 e^{b_2 x} + \ldots + a_n e^{b_n x} = 0$$

<u>פתרון:</u> נובע מהסעיף הקודם ע"י ההצבה $x = e^y$.