חדו"א 1 - תרגיל מס' 21

1. (א) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xa^x}{a^x-1} \overset{(L)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+x\log a\cdot a^x}{\log a\cdot a^x} = \frac{1}{\log a}$

(ב) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(5x)}{e^{3x}-3x-1} \overset{(L)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin(5x)\cdot\cos(5x)\cdot 5}{3e^{3x}-3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin(10x)}{3e^{3x}-3} \overset{(L)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{50\cos(10x)}{9e^{3x}} = \frac{50}{9}$

(ג) $\lim\limits_{x\to 0}\tan x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+}\log x = -\infty \Leftarrow \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\tan x}{\log x} = 0$

(ד) $L = \lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)^x = \lim\limits_{x\to 0+}\exp(\log(\sin x)\cdot x) = \exp(\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\log\sin x}{\frac{1}{x}})$ נחשב את הגבול הפנימי:

$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\log\sin x}{\frac{1}{x}} \overset{(L)}{=} \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x^2\cos x}{\sin x} = -\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x}{\sin x}\cdot x\cdot\cos x = -1\cdot 0\cdot 1 = 0.$

$\Longleftarrow L = \exp 0 = 1$

(ה) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-\cos x}{4x+\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{\cos x}{x}}{4+\frac{\sin x}{x}} = \frac{3}{4}$

(ו)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-(x+1)}{\tan x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x+x^2/2+x^3/6+o(x^3))(1-x^2/2+o(x^3))}{(x+x^3/3+o(x^3))-(x-x^3/6+o(x^3))} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+o(1))}{x^3(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+o(1))} = -\frac{2}{3}$$

(ז) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x-1} \overset{(L)}{=} 1$

(ח) $\lim\limits_{x\to\infty}x((1+\frac{1}{x})^x-e) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x\log(1+\frac{1}{x})}-e}{\frac{1}{x}} \overset{(L)}{=} \cdots = -e\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{x})+\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}} \overset{(L)}{=} \cdots = \frac{-e}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x+1)^2} = -\frac{e}{2}$

(ט) $\lim\limits_{x\to 5}(6-x)^{1/(x-5)} = e^{\lim_{x\to 5}\frac{\log(6-x)}{x-5}} \overset{(L)}{=} e^{\lim_{x\to 5}\frac{-1/(6-x)}{1}} = e^{-1}$

(י) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x}} \overset{(L)}{=} \cdots = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}\right) \overset{(L)}{=} \cdots = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0+}-\frac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}\right) = \exp\left(-\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x}+\cos x}\right) = \exp(0) = 1$

2. (א) אם גוזרים את המכנה מקבלים ביטוי שמתאפס בקבוצה לא חסומה, ולכן אי אפשר להשתמש בלופיטל.

(ב) אם מנסים להשתמש בלופיטל עבור $\frac{\log(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin(1/x))}{\frac{1}{x}}$, רואים כי הגבול של מנת הנגזרות לא קיים, לכן לא ניתן להגיד כלום על הגבול המקורי.

3. זה תרגיל עם "טריק": נכתוב $f(z)=\frac{f(z)e^{a\sqrt{x}}}{e^{a\sqrt{x}}}$. כיוון שהמכנה שואף לאינסוף ניתן להשתמש בלופילט (זוכי הכללה שהופיעה בשיעור). לכן $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \overset{(L)}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)e^{a\sqrt{x}}+f(x)e^{a\sqrt{x}}\frac{a}{2\sqrt{x}}}{e^{a\sqrt{x}}\frac{a}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{f}'(x)+af(x)}{a} = \frac{L}{a}$. בשויון האחרון השתמשנו בנתון. לפיכך הגבול של f אכן קיים ושווה ל־ $\frac{L}{a}$.

4. (א) דרך ראשונה ־ להציב בתוך פולינום טיילור של e^x, ולקבל: $f(x)=2^x=e^{x\log 2}=1+\log 2x+\frac{1}{2}(\log 2)^2x^2+\frac{1}{6}(\log 2)^3x^3+R_3(x)$. השארית היא של e^x כשהצבנו בו $x\log 2$, ולכן מקיימת $\lim\limits_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{(x\log 2)^3}=0$, אך זה גורר $\lim\limits_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^3}=0$. מיחידות פולינום טיילור, כיוון שהפולוינום שמצאנו מקיים את תכונת השארית הוא פולינום טיילור.

דרך שניה היא מהגדרת פולינום טיילור (חישוב הנגזרות עד סדר 3 וכו').

(ב) כאמור, ניתן לגזור 4 פעמים ולבנות את הפולינום. אם לא רוצים, אפשר גם כך: $\log(\cos x)=\log(1+(\cos x-1))=t-\frac{t^2x}{2}+t^33-\frac{t^4x}{4}+o(t^4)$, כאשר $t=\cos x-1$. נזכור ש־ $t=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$, ונציב זאת:

$$\log(1+t)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4))^2+$$
$$\frac{1}{3}(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4))^3-\frac{1}{4}(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4))^4=$$
$$-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{1}2+o(x^4)$$

כלומר הפולינום המבוקש הוא $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{1}2$.

(ג) הפעם נפתור בלי קיצורי דרך. $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$, $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}$, $f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}$, $f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}x^{-5/2}$, $f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-7/8}$.

בנקודה שלנו $x_0=1$ נקבל: $f(1)=1, f'(1)=\frac{1}{2}$, $f''(1)=-1/4, f^{(3)}(1)=\frac{3}{8}$, $f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}$.

$p_4(x)=\sum_{k=0}^4\frac{1}{k!}\cdot f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}(x-1)^3-\frac{1}{24}\frac{15}{16}(x-1)^4$.

5. (א) עבור $x>0$, משארית לגרנז' קיים $0<c<x$ כך ש־ $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{1}{(1+c)^5}\cdot\frac{x^5}{5}>x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$. שימו לב, השתמשנו בחיוביות של c. בדומה קיים $0<b<x$ כך ש־ $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{(1+b)^4}\frac{x^4}{4}<$ $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

6. יהי $x\in[0,1]$. נפתח את פולינום טיילור מסדר 1 סביב x:

$$f(z)=f(x)+(z-x)f'(x)+\frac{(z-x)^2}{2}f^{(2)}(c)$$

כאשר c בין x ל־z. נציב פעם $z=0$ ופעם $z=1$:

$$(1) \quad 0 = f(0) = f(x) - xf'(x) + \frac{x^2}{2} f^{(2)}(c_0)$$

$$(2) \quad 0 = f(1) = f(x) + (1-x)f'(x) + \frac{(1-x)^2}{2} f^{(2)}(c_1)$$

אם $x \in (0,1)$, אז $0 < c_0 < x$, $x < c_1 < 1$. במקרה שכזה נשתמש בנתון על הנגזרת השניה ונקבל:

$$(1) \Rightarrow |xf'(x) - f(x)| \leq \frac{x^2}{2} A$$
$$(2) \Rightarrow |f'(x) - (xf'(x) - f(x))| \leq \frac{(1-x)^2}{2} A$$

ומאי שויון משולש נקבל:

$$|f'(x)| \leq |xf'(x) - f(x)| + |f'(x) - (xf'(x) - f(x))| \leq \frac{A}{2}(x^2 + (1-x)^2)$$

ומחקירה אלמנטרית, $x^2 + (1-x)^2 \leq \frac{1}{2} < 1$, ומכאן שלכל $x \in (0,1)$, $|f'(x)| \leq \frac{A}{4} < \frac{A}{2}$.

עבור הנקודה $x = 0$, נציב אותה במשוואה (2) ונקבל הדרוש. את $x = 1$ נציב ב־(1) ונקבל זאת בדומה.

7. נפתח פולינום טיילור מסדר 2 סביב a:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(c) = f(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(c)$$

כאשר $a < c < x$. נציקב את $x = \frac{a+b}{2}$, ונקבל שקיים $a < c < \frac{a+b}{2}$ כך ש־

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 f''(c)$$

בדומה נפתח טיילור סביב b ונציקב את אותה נקדוה, כוון שגם $f'(b) = 0$ נקבל ביטוי דומה:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 f''(d)$$

כאשר $\frac{a+b}{2} < d < b$.

נחסר את שתי המשוואות ונקבל:

$$|f(b) - f(a)| = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 |f''(c) - f''(d)| \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 |f''(h)|$$

כאשר h היא הנקודה c או d, זו שבה הנגזרת השניה גדולה יותר בערך מוחלט.

8. יהיו $a \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$. נפתח פולינום טיילור סביב a:

$$f(a+t) = f(a) + tf'(a) + \frac{t^2}{2}f''(c)$$
$$f(a-t) = f(a) - tf'(a) + \frac{t^2}{2}f''(d)$$

החסר את המשוואות:

$$f(a+t) - f(a-t) = 2tf'(a) + \frac{t^2}{2}(f''(c) - f''(d))$$

מכאן ש־

$$2|t| \cdot |f'(a)| \leq |f(a+t)| + |f(a-t)| + \frac{t^2}{2}(|f''(c)| + |f''(d)|)$$
$$\leq 2M + 0 + t^2 M_2$$
$$\Rightarrow |f'(a)| \leq \frac{2M + 0 + t^2 M_2}{2|t|}$$

זה נכון לכל $a \in \mathbb{R}$, לכן $M_1 = \sup_{a \in R} |f'(a)| \leq \frac{2M + 0 + t^2 M_2}{2|t|}$. כלומר:

$$2M_1 t \leq 2M_1|t| \leq 2M_0 + M_2 t^2$$
$$M_2 t^2 - 2M_1 t + 2M_0 \geq 0$$

וזה נכון לכל $t \in \mathbb{R}$ (הוא נבחר להיות ממשי כלשהו בהתחלה). לכן יש בפנינו פרבולה ב־t אם לכל היותר שורש אחד, כלומר הדסקרימיננטה שלה קטנה שווה 0, כלומר: $4M_1^2 - 8M_0M_2 \leq 0$. זה שקול ל־$M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

9. נפתח לפולינום טיילור סביב 0 מדרגה 3:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(c_x)$$

כאשר c_x בין 0 ל־x. נציב פעם $x = 1$ ופעם $x = -1$, וונקבל:

$$f(1) = \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f^{(3)}(c)$$

$$f(-1) = \frac{1}{2}f''(0) - \frac{1}{6}f^{(3)}(d)$$

כש־$c \in (0,1)$, $d \in (-1,0)$. מחיסור שתי המשוואות נקבל: $1 = \frac{1}{6}(f^{(3)}(c) + f^{(3)}(d))$, או $f^{(3)}(c) + f^{(3)}(d) = 6$. מכאן ש־ $f^{(3)}(c) \geq 3$ או $f^{(3)}(d) \geq 3$.

10. (א) נכתוב את הנתון עבור $x \in \mathbb{R}$, פעם עם $h > 0$ ופעם עם $-h$ ונחסר ביניהם. נקבל:

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h} = f'(x+\frac{h}{2}) - f'(x-\frac{h}{2})$$

כעת, נשאיף את $h \to 0$. אגף ימין שואף ל־0. אגף שמאל שואף ל־$f''(x)$ (ראה תרגיל 10, שאלה 5). לכן $f''(x) = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, ולפיכך f פולינום ממעלה 2 (תרגיל 10 שאלה 7).