חדו"א 1 - תרגיל בית מס' 13 - פתרונות חלקיים

1. מצאו פיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ עבור הפונקציות הבאות:

(א) $f(x)=\sin\left(x^3\right)$, $x\in\mathbb{R}$

<u>פתרון:</u> לפי פיתוח טיילור של $\sin(x)$:

$$\sin\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}$$

ע"י הצבה מקבלים:

$$\sin\left(x^{3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}x^{6n+3}}{\left(2n+1\right)!}$$

(ב) $f(x)=\log\left(1+x+x^2\right)$, $x\in(-1,1)$

<u>פתרון:</u> נשים לב כי $1+x+x^2=\frac{1-x^3}{1-x}$, לכן:

$$\log\left(1+x+x^{2}\right)=\log\left(1-x^{3}\right)-\log\left(1-x\right)$$

לפי פיתוח טיילור של $\log\left(1+x\right)$ מקבלים:

$$\log\left(1+x+x^{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$$

כאשר

$$a_{n}=\begin{cases}0 & ,\quad n=0\\ -\frac{2}{n} & ,\quad n=3k,\ k\in\mathbb{N}\\ \frac{1}{n} & ,\quad n\neq3k,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

(ג) $f(x)=\frac{1}{1-5x+6x^2}$, $x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

<u>פתרון:</u> ניתן לרשום $\frac{1}{1-5x+6x^2}=\frac{3}{1-3x}-\frac{2}{1-2x}$, מקבלים כי

$$\frac{1}{1-5x+6x^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(3^{n+1}-2^{n+1}\right)x^{n}$$

ד) $f(x)=\sin x\cos 3x$, $x\in\mathbb{R}$
פתרון: נעזרים בזהות $2\sin x\cos 3x=\sin 4x-\sin 2x$ ובפיתוח טיילור של $\sin x$. מקבלים:

$$\begin{aligned}
2\sin x\cos 3x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}= \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n+1}\cdot\left(2^{2n+1}-1\right)x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

ה) ★ $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$, $x\in\mathbb{R}$
פתרון: נעזרים בזהות $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$ ובפיתוח טיילור של $\cos x$:

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}$$

לכן:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot(4x)^{2n}=1+\frac{3}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4^{2n-1}}{(2n)!}\cdot x^{2n}$$

הערה: ניתן לקבל את הזהות ע"י שימוש במספרים מרוכבים (למי שמכיר). בעזרת נוסחת אוילר מקבלים:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \\
\cos x &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}
\end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned}
\sin^6 x &= -\frac{1}{2^6}\cdot\left(e^{6xi}-6e^{4xi}+15e^{2xi}+15e^{-2xi}-6e^{-4xi}+e^{-6xi}+20\right) \\
\cos^6 x &= \frac{1}{2^6}\cdot\left(e^{6xi}+6e^{4xi}+15e^{2xi}+15e^{-2xi}+6e^{-4xi}+e^{-6xi}+20\right)
\end{aligned}$$

כלומר

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{12}{64}\cdot\left(e^{4xi}+e^{-4xi}\right)+\frac{40}{64}=\frac{3}{8}\cos 4x+\frac{5}{8}$$

2. בעזרת פיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ הוכיחו את אי־השיוויון:

$$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \le e^{x^2/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

<u>פתרון:</u> פיתוח טיילור של e^x הוא (נכון לכל $x \in \mathbb{R}$):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

לכן:

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ e^{x^2/2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^2/2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!} \end{aligned}$$

מכיוון שכל החזקות הן זוגיות מספיק להראות כי לכל $n \ge 0$ מתקיים: $\frac{1}{(2n)!} \le \frac{1}{2^n n!}$
כלומר $2^n \le \frac{(2n)!}{n!}$, אי־השיוויון נכון עבור $n=0$ ולכל $n \ge 1$ מתקיים:

$$2^n \le (n+1)(n+2)\cdot \ldots \cdot (2n) = \frac{(2n)!}{n!}$$

3. יהיו $f,g : I \to \mathbb{R}$ פונקציות קמורות על קטע $I \subset \mathbb{R}$.

(א) הוכיחו כי $f+g$ פונקציה קמורה.
<u>פתרון:</u> לפי הנתון מתקבל

$$\begin{aligned} (f+g)(tx+(1-t)y) &= f(tx+(1-t)y) + g(tx+(1-t)y) \le \\ &\le tf(x)+(1-t)f(y)+tg(x)+(1-t)g(y) \le \\ &\le t(f+g)(x)+(1-t)(f+g)(y) \end{aligned}$$

(ב) הוכיחו כי cf קמורה, לכל קבוע $c>0$.
<u>פתרון:</u> מיידי מההגדרה

(ג) הוכיחו כי $\max\{f,g\}$ קמורה.
<u>פתרון:</u> לפי הנתון מתקיים

$$\begin{aligned} \max\{f,g\}(tx+(1-t)y) &\le \max\{tf(x)+(1-t)f(y), tg(x)+(1-t)g(y)\} \le \\ &\le \max\{tf(x), tg(x)\} + \max\{(1-t)f(y), (1-t)g(y)\} = \\ &= t\max\{f(x), g(x)\} + (1-t)\max\{f(y), g(y)\} = \\ &= t\max\{f,g\}(x) + (1-t)\max\{f,g\}(y) \end{aligned}$$

(ד) האם $\min\{f,g\}$ בהכרח פונקציה קמורה ?

<u>פתרון:</u> הפונקציה $\min\{f,g\}$ לא בהכרח קמורה. אפשר למשל להסתכל על $h(x)=\min\left\{\frac{1}{x},x\right\}$ בקטע $(0,2)$. מתקיים:

$$h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},\,h\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}$$

אבל:

$$1=h\left(1\right)=h\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}\right)\geq\frac{h\left(\frac{1}{2}\right)+h\left(\frac{3}{2}\right)}{2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{2}=\frac{7}{12}$$

ולכן h איננה פונקציה קמורה בקטע $(0,2)$.

4. תהי $f:A\to B$, $A,B\subseteq\mathbb{R}$ פונקציה הפיכה וקמורה. האם f^{-1} קמורה ? האם התשובה שונה כאשר נתון כי f פונק' יורדת ?

<u>פתרון:</u> f^{-1} לא בהכרח קמורה, למשל $f(x)=e^{x}$ קמורה בקטע $(0,1)$, אבל $f^{-1}(x)=\log x$ קעורה באותו קטע.

נשים לב כי אם נתון כי f פונק' יורדת אזי גם f^{-1} פונקציה יורדת, נראה כי היא פונק' קמורה. ראשית f היא פונקציה רציפה, ולכן התמונה של A היא קטע. לכן לכל $x,y\in f\left(A\right)$ הפונקציה f^{-1} מוגדרת בנקודה $tx+\left(1-t\right)y$ ($t\in[0,1]$) ומתקיים:

$$\begin{aligned}f^{-1}\left(tx+\left(1-t\right)y\right) & \leq & tf^{-1}\left(x\right)+\left(1-t\right)f^{-1}\left(y\right)\iff\\ tx+\left(1-t\right)y & \geq & f\left(tf^{-1}\left(x\right)+\left(1-t\right)f^{-1}\left(y\right)\right)\end{aligned}$$

אי־השיוויון האחרון מתקיים לפי קמירות f:

$$f\left(tf^{-1}\left(x\right)+\left(1-t\right)f^{-1}\left(y\right)\right)\leq tf\left(f^{-1}\left(x\right)\right)+\left(1-t\right)f\left(f^{-1}\left(y\right)\right)=tx+\left(1-t\right)y$$

<u>הערה:</u> באופן דומה ניתן להוכיח כי אם f קמורה ועולה אזי f^{-1} קעורה ועולה.

5. הוכיחו את אי־השיוויונות הבאים:

(א) לכל $x,y>0$:

$$x\log x+y\log y\geq\left(x+y\right)\log\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

<u>פתרון:</u> הפונקציה $f(x)=x\log x$ קמורה בקטע $(0,\infty)$ ($f''\left(x\right)=\frac{1}{x}>0$) ולכן:

$$\frac{f\left(x\right)+f\left(y\right)}{2}=\frac{x\log x+y\log y}{2}\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\left(\frac{x+y}{2}\right)\log\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

(ב) לכל $\alpha>1$ ולכל $x_1,x_2,\ldots,x_n>0$:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^{\alpha}\leq\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^{\alpha}$$

<u>פתרון:</u> נעזרים בא"ש ינסן ובעובדה שהפונקציה x^{α} קמורה בקטע $(0,\infty)$ לכל $\alpha>1$.

6. ★ נסמן $x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$, כאשר $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,\pi)$. הוכיחו כי מתקיים אי־השיוויון הבא:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(x_k)}{x_k} \leq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

<u>פתרון:</u> נשים לב כי $f(x) = \log x - \log(\sin x)$ פונקציה קמורה ב $(0,\pi)$ מכיוון ש: ($\sin x < x$ ב $(0,\pi)$)

$$f''(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} > 0$$

לפי א"ש ינסן (עם משקל זהה של $\frac{1}{n}$) מקבלים:

$$\begin{aligned} \log(x) - \log(\sin x) &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\log x_k - \log(\sin x_k)\right) \Rightarrow \\ \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{\sin x_k}{x_k}\right) &\leq n \cdot \log\left(\frac{\sin x}{x}\right) \Rightarrow \\ \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin x_k}{x_k} &\leq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \end{aligned}$$

7. הוכיחו את אי־השיוויונות הבאים:

(א) עבור $\alpha_k, x_k > 0$ לכל $k \in \{1,\ldots,n\}$ כך שמתקיים $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$:

$$\frac{1}{\frac{\alpha_1}{x_1} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x_n}} \leq x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$$

<u>פתרון:</u> משתמשים בא"ש ינסן עבור הפונקציה $f(x) = -\log x$. את אי־השיוויון השמאלי מקבלים ע"י החלפה של x_k ב $\frac{1}{x_k}$.

(ב) עבור $\alpha_k > 0, x_k, y_k \geq 0$ לכל $k \in \{1,\ldots,n\}$ כך שמתקיים $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$:

$$x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} + y_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{\alpha_n} \leq (x_1 + y_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x_n + y_n)^{\alpha_n}$$

<u>פתרון:</u> אי־השיוויון מיידי כאשר אחד או יותר מ x_k, y_k שווים 0. כאשר $x_k, y_k > 0$ לכל $k \in \{1,\ldots,n\}$ נרשום את אי־השיוויון שצריך להוכיח מחדש:

$$\frac{x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} + y_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{\alpha_n}}{(x_1 + y_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x_n + y_n)^{\alpha_n}} \leq 1$$

לפי סעיף ב' מקבלים:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}+y_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot y_n^{\alpha_n}}{(x_1+y_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x_n+y_n)^{\alpha_n}} &= \left(\frac{x_1}{x_1+y_1}\right)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x_n}{x_n+y_n}\right)^{\alpha_n}+\\
&\quad \left(\frac{y_1}{x_1+y_1}\right)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{y_n}{x_n+y_n}\right)^{\alpha_n}\le\\
&\le \alpha_1\left(\frac{x_1}{x_1+y_1}\right)+\ldots+\alpha_n\left(\frac{x_n}{x_n+y_n}\right)+\\
&\quad \alpha_1\left(\frac{y_1}{x_1+y_1}\right)+\ldots+\alpha_n\left(\frac{y_n}{x_n+y_n}\right)=\\
&= \alpha_1+\ldots+\alpha_n=1
\end{aligned}$$

(ג) עבור $\alpha_i>0, x_{i,j}\ge 0$ לכל $j\in\{1,\ldots,m\}$, ולכל $i\in\{1,\ldots,n\}$ כך שמתקיים $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1$:

$$\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}x_{i,j}^{\alpha_i}\le\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}x_{i,j}\right)^{\alpha_i}$$

<u>פתרון:</u> מוכיחים באינדוקציה על m. $m=1$ הוא זהות ($m=2$ הוא סעיף ג').
נניח נכונות הטענה עבור m ונוכיח עבור $m+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m+1}\prod_{i=1}^{n}x_{i,j}^{\alpha_i} &\overset{(*)}{\le} \sum_{j=1}^{m-1}\prod_{i=1}^{n}x_{i,j}^{\alpha_i}+\prod_{i=1}^{n}\left(x_{im}+x_{i(m+1)}\right)^{\alpha_i}\\
&\overset{(i.h.)}{\le} \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m-1}x_{i,j}+\left(x_{im}+x_{i(m+1)}\right)\right)^{\alpha_i}=\\
&= \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m+1}x_{i,j}\right)^{\alpha_i}
\end{aligned}$$

כאשר ב $(*)$ השתמשנו בסעיף ב' ו $i.h$ הוא השימוש בהנחת האינדוקציה.

8. נתון כי $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ היא פונקציה קמורה ובנוסף:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0.$$

הוכיחו כי הפונקציה $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ היא מונוטונית עולה ב $(0,\infty)$.

<u>פתרון:</u> יהיו $x_1<x_2\in(0,\infty)$ נקודות כלשהן. אם $0<x<x_1$ אזי:

$$x_1=\frac{x_2-x_1}{x_2-x}\cdot x+\frac{x_1-x}{x_2-x}\cdot x_2$$

לפי קמירות f מקבלים:

$$f(x_1)\le\frac{x_2-x_1}{x_2-x}\cdot f(x)+\frac{x_1-x}{x_2-x}\cdot f(x_2)$$

כלומר:

$$\begin{aligned} f(x_1) &\le \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x_2-x_1}{x_2-x}\cdot f(x)+\frac{x_1-x}{x_2-x}\cdot f(x_2)\right]= \\ &= \frac{x_1}{x_2}\cdot f(x_2) \end{aligned}$$

ולכן:

$$\frac{f(x_1)}{x_1}\le\frac{f(x_2)}{x_2}.$$