פתרון (חלקי) מס' 2 - חדו"א 1

1. נשים לב שכל מספר רציונלי $q>0$ הוא מחזור של $D(x)$: $D(x+q)=D(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$, כי $x, x+q$ שניהם רציונלים או שניהם אי־רציונלים ביחד (חשבו מדוע!). אין לה מחזור קטן ביותר, שהרי אפשר לקחת q חיובי וקטן כרצוננו, למשל $q=\frac{1}{n}$ כש־n שלם.

2. כל הטענות נכונות, למעט הטענה על $f+g$ ב־א'.

3. אם נניח ש־f_1 זוגית ו־f_2 אי־זוגית כך ש־$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, נקבל ע"י הצבת $-x$: $f(-x)=f_1(x)-f_2(x)$. משתי משוואות לינאריות אלו ניתן לפתור עבור $f_1,\ f_2$ ולקבל $f_1(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x)),\ f_2(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$. בדיקה מראה שהן אכן זוגית ואי־זוגית כנדרש.

4. (א) $A=\{\frac{1}{n}+(-1)^n, |, n\in\mathbb{N}\}$. ראשית נראה ש־$\inf A=-1$. -1 אכן חסם תחתון. לו היה גם $-1+\epsilon$ חסם תחתון עבור איזשהו $\epsilon>0$, אזי עבור n אי־זוגי גדול דיו נקבל $\frac{1}{n}+(-1)^n=-1+\frac{1}{n}<-1+\epsilon$, וזו סתירה. ל־$A$ אין מינימום כי -1 אינו ב־A. $\sup A=\max A=\frac{3}{2}$: זהו חסם עבור $n=1$, ולכל $n\geq 2$ מתקיים $\frac{1}{n}+(-1)^n\leq\frac{1}{n}+1\leq\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$. החסם הזה מתקבל ב־$n=2$ ולכן זהו מקסימום.

   (ב) $B=\{\frac{n-1}{n+1}\cos(\frac{2n\pi}{3}), |, n\in\mathbb{N}\}$. התשובה הסופית היא $\inf B=-\frac{1}{2}$, $\sup B=1$, אין מקסימום ואין מינימום. כדי להוכיח למשל את הסופרימום, שימו לב שאם נציב $n=3k$ אז נקבל איברים מהצורה $\frac{3k-1}{3k+1}$. לכל $\epsilon>0$ ניתן למצוא k כך ש־$\frac{3k-1}{3k+1}>1-\epsilon$ (לפתור את אי־השוויון). זה יוכיח כי $1-\epsilon$ אינו חסם עליון.

   (ג) $C=\{x^2+x+1, |, x\in(0,\infty)\}$. תשובה סופית: $\min C=\frac{3}{4}$, הקבוצה לא חסומה מלמעלה.

5. ראה תחילה ש־$\sup A\cdot\sup B$ הוא חסם לקבוצה $C=x\cdot y: x\in A, y\in B$. אכן, אם $z\in C$ הרי שקיימים $x\in A$ ו־$y\in B$ כך ש־$z=x\cdot y$. $x\leq\sup A$, $y\leq\sup B$ ומכאן ש־$z\leq\sup A\cdot\sup B$. כעת נראה שזהו החסם הקטן ביותר: נקבע $\epsilon>0$ ונראה ש־$\sup A\cdot\sup B-\epsilon$ אינו חסם עליון ל־C. נגדיר קבוע קטן חדש $\epsilon'=\frac{\epsilon}{\sup A+\sup B}$ (מיד תראו מדוע). מהגדרת $\sup A$, קיים איבר $x_0\in A$ כך ש־$x_0>\sup A-x\epsilon'$. באופן דומה קיים $y_0\in B$: $y_0>\sup B-\epsilon'$. נכפול (כל המספרים ב־A וב־B חיוביים, לכן כיוון אי השויון נשמר):

$$x_0y_0>(\sup A-\epsilon')(\sup B-\epsilon')=\sup A\sup B-\epsilon'(\sup A+\sup B)+(\epsilon')^2>$$
$$>\sup A\sup B-\epsilon'(\sup A+\sup B)=\sup B\sup B-\epsilon$$

כלומר $\sup A\cdot\sup B-\epsilon$ אינו חסם עליון ל־C, כנדרש.

7. לכל $x\in[a,b]$, מתקיים $f(x)\leq\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, $g(x)\leq\sup\limits_{x\in[a,b]}g(x)$; חיבור שני אלה נותן כי $\sup f(x)+\sup g(x)$ אכן חסם ל־$f(x)+g(x)$ (הכל בקטע $[a,b]$). אין שויון למשל עבור הפונקציות $f(x)=x,\ g(x)=-x$ בקטע $[-1,1]$. שימו לב להבדל מול תרגיל 5א' - בו יש שיווין. מה גורם לכך?

8. (א) לו היתה A סופית, אזי היה לה איבר מקסימלי. לכן הטענה נכונה (A בהכרח אינסופית).

(ב) לא נכון, למשל $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ היא קבוצה אינסופית ללא איבר מינימלי, וחסומה.

(ג) לא נכון, $A = (0,1),\ B = (1,2)$ הם דוגמה נגדית.

(ד) לא נכון, למשל $A = (0,1) \cap \mathbb{Q}$, $B = (0,1) \cap \mathbb{Q}^c$.

(ה) לא נכון, למשל $A = (0,1),\ B = (-1,1)$.

9. (א) סכום סדרה הנדסית, מקבלים $\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

(ב) לכל $k \geq 2$, $k! = k \cdot (k-1) \dots 2 \geq 2^{k-1}$.

(ג) הפרידו מהסכום את ארבעת האיברים הראשונים: $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$. את השאר חשבו לפי טור הנדסי, וקבלו שהוא חסום ע"י $\frac{1}{8}$.

(ד) נפתח לפי נוסחת הבינום:

$$(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$

נותר רק להראות כי $\frac{n!}{(n-k)!n^k} < 1$. זה שקול ל־$n(n-1)\dots(n-k+1) < n^k$, וזה אכן נכון כי באגף שמאל ישנם k איברים שכולם קטנים ממש מ־n, חוץ מהראשון ששווה לו.

(ה) די להראות כי $1 + \frac{1}{n} < (1+\frac{1}{2n})^2$, וזה נובע בקלות אחרי פתיחת הסוגריים. מכאן נסיק שאין מקסימום: אם החסם העליון מתקבל באיזשהו n_0, הרי שהאיבר המתאים ל־$2n_0$ גדול ממש ממנו ־ סתירה.

10. נציג רמזים ופתרונות חלקיים.

(א) שימו לב ש־$\frac{1}{k+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

(ב) הזכרו בכך ש־$k^2 - 1 = (k+1)(k-1)$. על כן המונה הוא $\frac{1}{2}(n+1)!n!$, והמכנה הוא $n!^2$. התשובה הסופית $\frac{k+1}{2k}$.