פתרונות של תרגיל 3 בחדו"א-1

1) א. תשובה: $N=[M]$. אינסופית.

ב) דוגמה נגדית: $a_n=(-1)^n,\ n\in\mathbb{N}$. הסדרה לא מתכנסת. נבדוק שכל מס' מקיים את תנאי השאלה: לכל $x\in\mathbb{R}$ נקח $\varepsilon=2|x|+2$ ו- $N=1$ לכן:

$$|a_n-x|\le|a_n|+|x|=1+|x|<2(1+|x|)=\varepsilon$$

2) נכון. בוא נבדוק סדרה: $a_n=\begin{cases} n, & n=2k \\ \frac{1}{n}, & n=2k-1,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}$. לכל M קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $M<2k$. לכן $\{a_n\}$ אינה חסומה. כמו כן, הסדרה אינה שואפת ל- ∞ מספיק לבדוק שלכל $M>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $n>N$ ש- $a_n<M$.

$a_n=a_{2k-1}=\frac{1}{n}<M \Rightarrow n>\frac{1}{M}$. לכן מספיק לבחור $N=[\frac{1}{M}]+1$

3) א) נבחר N:

$$\left|a_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{n^2-n-2}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{-5n+10}{9n^2+6n-12}\right|<\varepsilon \Leftarrow$$

(נבדוק לכל $n>10$)

$$\left|\frac{-5n+10}{9n^2+6n-12}\right|<\frac{6n}{9n^2}<\frac{1}{n}\overset{?}{<}\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$$

ב)

$$|a_n|<\varepsilon \iff \left|\sqrt{n^2-\cos n}-n\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{\cos n}{\sqrt{n^2-\cos n}+n}\right|<\varepsilon.$$

$$|a_n|<\varepsilon \iff \left|\frac{\cos n}{\sqrt{n^2-\cos n}+n}\right|<\left|\frac{1}{2n-1}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$$

ג)

$$|a_n|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{\sin(n!)}{\sqrt[3]{n^2}}\right|<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\varepsilon \Rightarrow N=\left[\frac{1}{\varepsilon^3}\right]+1$$

3) נוכיח במקרה $c>1$ (המקרה $0<c<1$ מוכיחים באותה דרך). נסמן $c=1+\alpha,\ \alpha>0$. נסמן $\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{1+\alpha}=1+x_n$, $x_n>0$. מספיק לבדוק ש- $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. כלומר:

$$1+\alpha=(1+x_n)^n=1+n\cdot x_n+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x_n^k>1+n\,x_n \iff 0<x_n<\frac{\alpha}{n}$$

$$|\sqrt[n]{c}-1|=|x_n|<\varepsilon \Rightarrow |x_n|=x_n<\frac{\alpha}{n}<\varepsilon \Rightarrow N\overset{\text{לכן}}{=}\left[\frac{\alpha}{n}\right]+1$$

4) נניח שלא כך. נניח ש- $\{a_n\}$ סדרה מתכנסת אז קיים A כך שלכל $\varepsilon>0$ $\exists N$: $\forall n>N$ $|a_n-A|<\varepsilon \Leftarrow$ לכל $m,n>N$ $|a_n-a_m|=|a_n-A+A-a_m|\le|a_n-A|+|a_m-A|<2\varepsilon$. כלומר, צד ב' לא נכון, שסדרה מתבדרת אם $\underbrace{\text{קיים}}_{\varepsilon>0}$ שלכל N קיימים $n,m>N$ עבורם $|a_n-a_m|>\varepsilon$.

א) נקח $a_n=\frac{n}{n+1}(1+\cos n\pi)$ אז $a_n=\begin{cases}\frac{2n}{n+1}, & n=2k \\ 0, & n=2k-1\end{cases}$

נקח $\varepsilon=\frac{1}{2}$ ו- $n=2N$ ו- $m=2N+1 \Leftarrow$

$|a_n-a_m|=\frac{2n}{n+1}\ge\frac{2}{3}>\varepsilon$ עבור

ב) באותה דרך לכל $N>10$ נבחר $n=2N$ ו- $m=2N+1$ $(\varepsilon=\frac{1}{2})$

$$|a_n-a_m|=\left(1+\frac{3}{2N}\right)-(-1)-\frac{3}{2N+1}=2-\frac{3}{2N}-\frac{3}{2N+1}\overset{\text{לכן}}{>}1>\varepsilon.$$

המשך פתרונות של תרגיל 3

④ ג) שלב נקח $\varepsilon=\frac{1}{2}$! לכל N מתקיים בין $|a_{3N}-a_{3N+1}|$ (כלומר $m=3N+1$, $n=3N$!) אז $|a_{3N}-a_{3N+1}|=1>\varepsilon$.

⑤ נניח בשלילה: ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n)=L$. לכן $0=\lim\limits_{n\to\infty}[\sin(n+2)-\sin(n)]=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}2\underset{\neq 0}{\sin 1}\cdot\cos(n+1) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+1)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n)=0 \Rightarrow$
$\sin 2n=2\sin n\cdot\cos n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow L=0. \Rightarrow \exists N: n>N\ |\sin n|<\frac{1}{2};$
$|\cos n|<\frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 n+\cos^2 n<\frac{1}{2}\neq 1. \Rightarrow$ סתירה.

⑥ א) אם $0\le\sqrt[n]{|a_n|}\le\alpha<1$ אז $0\le a_n<\alpha^n$, $\alpha^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \Leftarrow a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

ב) נקח $\varepsilon=\frac{1-l}{2} \Leftarrow$ לכל $n>N(\varepsilon) \Leftarrow \sqrt[n]{|a_n|}<1-\frac{1-l}{2}$; $\sqrt[n]{a_n}<\frac{1}{2}+\frac{l}{2}=l_1<1$;
לכן לפי סעיף הקודם
$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$
ולכן $0\xleftarrow[n\to\infty]{}b_n=a_{n+N(\varepsilon)}$.

ג) דוגמא נגדית: $a_n=\frac{n}{n+1}<1 \Leftarrow \sqrt[n]{a_n}<1$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1\neq 0$

③ נשים לב ש $\sqrt[n]{a_n}=h\cdot\underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{n^\alpha}}\xrightarrow[n\to\infty]{}h$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ולכן a_n מקיים את התנאי של סעיף ב)

⑦ א) ולכן $0<a_n<\frac{1}{n} \Rightarrow a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$; ב) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000n}{n^2-2}=0$.
$a_n=\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1}=\frac{2}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-1}}$

ג) $a_n=\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3+1}=\frac{n^2-1}{\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)^2+\sqrt[3]{(n^3+n^2)(n^3+1)}+\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^2}$
לכן $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{3}$

③ $0<|a_n|<\frac{n^{2/3}}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin(n!)}{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

ה) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$

ו) נשים לב ש לכל $1\le k\le n \Leftarrow 0<\frac{k}{n+k}\le\frac{1}{2} \Rightarrow 0<\frac{(n!)^2}{(2n)!}\le\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)(n+2)\cdots 2n}=0$

ז) רמז: הוכיחו באינדוקציה: (או אחרת) ש
$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n-1}}$
ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

ח) תשובה: $\lim a_n=1$

פתרונות של תרגיל 3 בחדו"א 1.

(7) (ו) $a_n=\dfrac{2^n+3^n}{3\cdot 2^{n+1}+2\cdot 3^{n-1}}=\dfrac{3^n\left[1+(\frac{2}{3})^n\right]}{3^n\left[\frac{2}{3}+6(\frac{2}{3})^n\right]}$ ⇐ לכן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{(2/3)}=1.5$

(ז) $a_n=\sqrt[n+2]{n^5-2n+7}$. ⇐ $1<\sqrt[n+2]{n^5-2n+7}\le\sqrt[n+2]{n^5}$ לכל $n\geq 4$

$\sqrt[n+2]{n^5}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$ ⇐ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$

(8) (א) דוגמה: נגדיר $a_n=(-1)^n$.

(ב) $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ ⇐ $(\forall\varepsilon)$ $\exists N_1$: $|x_n-a|<\varepsilon$ לכל $n>N_1$. $a=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ ⇐ $\forall\varepsilon$ $\exists N_2$: $n>N_2$ ⇐ $|y_n-a|<\varepsilon$. לכן נתון $\varepsilon>0$. נבחר $N=\max(N_1,N_2)$ ואז לכל $m>2N$ מתקיים $|z_m-a|<\varepsilon$, כאשר $z_m=\begin{cases}x_{m/2}, & m=2k\\ y_{\frac{m+1}{2}}, & m=2k+1\end{cases}$.

(ג) לא נכון / $a_n=\begin{cases}1, & n=2k\\ 0, & n=2k-1\end{cases}$, $b_n=\begin{cases}0, & n=2k\\ 1, & n=2k-1\end{cases}$. $a_n\cdot b_n\to 0$. אך $a_n\not\xrightarrow[n\to\infty]{}0$! $b_n\not\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

(ד) (i) נכון / $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right|=\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right|$. מונה שואף ל-0. המכנה ל-a! לכן $\frac{a_{n+1}}{a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

(ii) דוגמה (1) $a_n=\frac{1}{a^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, $a>1$. ⇐ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{a}$ לכל n.

דוגמה (2) $a_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & n\neq k^2\\ \frac{1}{n^2}, & n=k^2\end{cases}$. בדקו שאין גבול ל-$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$.

(ה) רמז: בלי הגבלת הכלליות נניח ש- $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ (נגדיר $b_n=a_n-a$)! נחלק את $\sum_{k=1}^{n}a_k$ ל- $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{N}a_k+\sum_{k=N+1}^{n}a_k$ כך ש- $|a_k|<\varepsilon$ ל- $N<k$! ונגדיל את n.

(9) (א) נגדיר $a_{n+1}=a_n^3$, $a_1=\frac{1}{2}$. לכן $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n^2}=0$

(ב) לא נכון / דוגמה: נגדיר $a_n=\sqrt[4]{n}$. אין גבול סופי ל-a_n^2, אבל $(a_{n+1}^2-a_n^2)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$! $\frac{a_{n+1}}{a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

(10) מספיק להוכיח את ... f' ... (מוגדר ...). נוכיח באינדוקציה:

$n=1$: $a_1^2\le a_1-a_2<a_1$ ולכן $0<a_1<1$. אזי $a_2<a_1-a_1^2\le\frac{1}{4}$ (אז גם $a_2\le\frac{1}{4}$)

נניח $a_n<\frac{1}{n}$. נוכיח, ש- $a_{n+1}<\frac{1}{n+1}$. נשים לב ש- $f(x)=x-x^2$ עולה בקטע $(0;\frac{1}{2}]$. $a_n<\frac{1}{n}$. לכן:

$a_{n+1}\le f(a_n)=a_n-a_n^2<f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n^2}$; וכן $\frac{n-1}{n^2}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}=*$

$a_{n+1}\le f(a_n)\le f(\frac{1}{n})=\frac{n-1}{n^2}=\frac{(n+1)(n-1)}{(n+1)n^2}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n^2(n+1)}<\frac{1}{n+1}$

מש"ל