חדו"א 1א - תרגיל בית מס' 5 - פתרונות חלקיים

1. הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול:

$$a_1 = a > 0, \quad a_{n+1} = 3 \cdot \frac{a_n - 1}{a_n + 3}$$

פתרון: נניח בשלילה כי קיים לסדרה גבול סופי $L \neq -3$, לפי אריתמטיקה של גבולות מתקבל:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{a_n - 1}{a_n + 3} \Rightarrow L = 3 \cdot \frac{L-1}{L+3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow L^2 + 3L = 3L - 3 \Rightarrow L^2 = -3 \end{aligned}$$

וקיבלנו סתירה. באופן דומה מראים כי הגבול איננו -3 או $\pm\infty$.

2. פתרו את השאלות הבאות:

(א) נתונה סדרה $\{a_n\}$ כך ש $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, וסדרה חיובית $\{b_k\}$המקיימת $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \infty$. הוכיחו כי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = a$$

פתרון: לפי הנתון לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים כי $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$. נשים לב כי הסכומים

$$S_1 = \sum_{k=1}^{N} a_k b_k, \; S_2 = \sum_{k=1}^{N} b_k$$

הם מספרים קבועים שאינם תלויים ב n. מתקיים כי:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = \frac{\sum_{k=1}^{N} a_k b_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{N} b_k + \sum_{k=N+1}^{n} b_k}$$

ולכן עבור $n>N$: (כאן אנו נעזרים בעובדה ש $b_k>0$ לכל k, כלומר $(a-\epsilon)\,b_k<a_kb_k<(a+\epsilon)\,b_k$)

$$\frac{S_1+(a-\epsilon)\sum\limits_{k=N+1}^{n}b_k}{S_2+\sum\limits_{k=N+1}^{n}b_k}<\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k}<\frac{S_1+(a+\epsilon)\sum\limits_{k=N+1}^{n}b_k}{S_2+\sum\limits_{k=N+1}^{n}b_k}$$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{S_1/\left(\sum\limits_{k=N+1}^{n}b_k\right)+(a+\epsilon)}{S_2/\left(\sum\limits_{k=N+1}^{n}b_k\right)+1}=a+\epsilon$$

כאשר השתמשנו בנתון $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=\infty$, כלומר $\sum\limits_{k=N+1}^{n}b_k\to\infty$. באותו אופן מראים כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k}\geq a-\epsilon$$

מכיוון ש $\epsilon>0$ שרירותי קיבלנו את הדרוש.

(ב) הוכיחו את הגרסא הבאה של משפט שטולץ: תהי $\{x_n\}$ סדרה כלשהי ותהי $\{y_n\}$ סדרה עולה ממש כך ש $y_n\to\infty$ ובנוסף קיים הגבול במובן הרחב: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\infty$. אזי מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\infty$.

<u>פתרון:</u> (לתקן !!! מקרה של גבול סופי) בהינתן $M>0$, בוחרים N_1 כך שיתקיים לכל $n\geq N_1$: $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}>M$, לכן

$$x_{n+1}-x_n>M\left(y_{n+1}-y_n\right),\quad n\geq N_1$$

לאחר סיכום מ N_1 עד n מקבלים:

$$x_{n+1}-x_{N_1}>M\left(y_{n+1}-y_{N_1}\right)$$

כלומר

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}>M-\frac{M\cdot y_{N_1}}{y_{n+1}}+\frac{x_{N_1}}{y_{n+1}}$$

בוחרים N_2 כך שיתקיים לכל $n\geq N_2$, $\left|\frac{x_{N_1}}{y_{n+1}}\right|,\left|\frac{M\cdot y_{N_1}}{y_{n+1}}\right|<\frac{M}{4}$ (ניתן לבחור n כזה מכיוון ש $y_n\to\infty$ והמספרים M,x_{N_1},y_{N_1} אינם תלויים ב n). לכן לכל

מתקיים כי: $n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} > M - \frac{M}{4} - \frac{M}{4} = \frac{M}{2}$$

מכיוון ש $M > 0$ שרירותי קיבלנו כי $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$.

3. חשבו בעזרת משפט שטולץ (Stolz) את הגבולות הבאים:

(א) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$

<u>פתרון:</u> רושמים $x_n = 1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}$ ו $y_n = n$, ע"י שטולץ מקבלים מיד כי הגבול הוא 1.

(ב) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$ לכל $p \in \mathbb{N}$.

<u>פתרון:</u> ע"י הפעלת שטולץ מקבלים

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^{p+1}-(n-1)^{p+1}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{\sum\limits_{k=1}^{p+1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} n^{p+1-k}(-1)^{k+1}} = \\ &= \frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

(ג) ★ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1}\right)$ לכל $p \in \mathbb{N}$.

<u>פתרון:</u> מתקיים כי:

$$\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} = \frac{(p+1)(1^p+2^p+\ldots+n^p)-n^{p+1}}{n^p(p+1)}$$

לפי שטולץ מספיק לחשב את הגבול הבא:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(p+1)(1^p+\ldots+n^p)-n^{p+1}-\left((p+1)(1^p+\ldots+(n-1)^p)-(n-1)^{p+1}\right)}{n^p(p+1)-(n-1)^p(p+1)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(p+1)n^p - n^{p+1}+(n-1)^{p+1}}{(p+1)(n^p-(n-1)^p)} =$$

ע"י שימוש בנוסחת הבינום מקבלים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)\,n^{p}-n^{p+1}+\sum_{k=0}^{p+1}\begin{pmatrix} p+1\\ k\end{pmatrix}n^{k}\,(-1)^{p+1-k}}{(p+1)\left(n^{p}-\sum_{k=0}^{p}\begin{pmatrix} p\\ k\end{pmatrix}n^{k}\,(-1)^{p-k}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)\,n^{p}-n^{p+1}+n^{p+1}-(p+1)\,n^{p}+\frac{(p+1)p}{2}n^{p-1}+\ldots}{(p+1)\,(n^{p}-n^{p}+pn^{p-1}+\ldots)} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{p-1}+\ldots}{2n^{p-1}+\ldots} = \tfrac{1}{2}$$

(ד) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}$ כאשר $a_n\to a,\ b_n\to b$ עבור $n\to\infty$.

פתרון: מקבלים שהגבול הוא ab.

(ה) $\lim_{n\to\infty}\frac{b_1+2b_2+\ldots+nb_n}{n^3}$ כאשר $\{b_n\}$ סדרה המקיימת: $\frac{b_n}{n}\to B$ כאשר $n\to\infty$.

פתרון: מקבלים שהגבול הוא $\frac{B}{3}$.

(ו) $\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor 1^2\alpha\rfloor+\lfloor 2^2\alpha\rfloor+\ldots+\lfloor n^2\alpha\rfloor}{n^3}$ כאשר $\alpha\in\mathbb{R}$.

פתרון: ע"י שימוש בשטולץ מקבלים כי הגבול שווה לגבול הבא

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor n^2\alpha\rfloor}{n^3-(n-1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\alpha-\{n^2\alpha\}}{3n^2-3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha-\{n^2\alpha\}/n^2}{3-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\alpha}{3}$$

כאשר $\{x\}$ מסמן את החלק השברי של x (מתקיים כי $\{x\}\in[0,1)$).

4. ★ תהי סדרה חסומה המקיימת: $a_{n+1}\ge a_n-2^{-n}$ לכל n. הראו כי הסדרה מתכנסת.

רעיון: הגדירו סדרה חדשה באופן הבא $b_n=a_n-\frac{1}{2^{n-1}}$. הראו כי b_n מונוטונית עולה וחסומה, ולכן מתכנסת. הסיקו כי a_n מתכנסת.

5. יהי a גבול חלקי של סדרה מונוטונית $\{a_n\}$. הוכיחו כי $a_n\to a$ כאשר $n\to\infty$.

פתרון: נניח בה"כ כי $\{a_n\}$ סדרה מונוטונית עולה. נתון כי a גבול חלקי של $\{a_n\}$ לכן קיימת תת־סדרה $\{a_{n_k}\}$ כך ש $a_{n_k}\to a$ כאשר $k\to\infty$. בהינתן $\epsilon>0$ קיים M כך ש $a_{n_M}>a-\epsilon$, לכן לפי מונוטוניות לכל $n>n_M$ מתקיים כי $a_n>a-\epsilon$. מכיוון שלא ייתכן כי $a_n>a$ עבור n כלשהו (ממונוטוניות היינו מקבלים סתירה לכך ש $\{a_{n_k}\}$ מתכנסת ל a) נובע כי $a_n\to a$ כאשר $n\to\infty$.

6. תהי סדרה $\{a_n\}$ ונגדיר סדרה $\{b_n\}$ באופן הבא: $b_n=\sqrt[n]{n}\cdot a_n$. הוכיחו כי לשתי הסדרות יש את אותם הגבולות החלקיים.

פתרון: נשים לב כי $\sqrt[n]{n}\to 1$. אם b הוא גבול חלקי של $\{b_n\}$ אז קיימת תת־סדרה $\{b_{n_k}\}$ כך ש $b_{n_k}\to b$ כאשר $k\to\infty$, כלומר

$$\frac{b_{n_k}}{\sqrt[n_k]{n_k}}=a_{n_k}\to\frac{b}{1}=b$$

ולכן b גבול חלקי של $\{a_n\}$. באותו אופן אם a הוא גבול חלקי של $\{a_n\}$ הוא גם גבול חלקי של $\{b_n\}$.

7. מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות: (חשבו בנוסף את $\limsup$ ו $\liminf$):

(א) $$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & n\,\text{even} \\ \frac{1}{n^2}, & n\,\text{odd} \end{cases}$$

פתרון: $a_n \to 0$ כאשר $n \to \infty$ ולכן $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ והגבול החלקי היחיד הוא 0.

(ב) $$a_n = (-1)^{n+1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$$

פתרון: כאשר $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ מקבלים את תת־הסדרה $a_{2k} = -\left(2 + \frac{3}{2k}\right)$ אשר יש לה גבול -2. כאשר $n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}$, מקבלים את תת־הסדרה $a_{2k-1} = 2 + \frac{2}{2k-1}$ אשר יש לה גבול 2. לכן קבוצת הגבולות החלקיים היא $\{\pm 2\}$. $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ ו $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -2$.

(ג) $$a_n = 1 + n\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

פתרון: נשים לב כי מתקיים:

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 3k \\ 1 + \frac{\sqrt{3}(3k-2)}{2}, & n = 3k-2 \\ 1 - \frac{\sqrt{3}(3k-1)}{2}, & n = 3k-1. \end{cases}$$

לכן קבוצת הגבולות החלקיים היא $\{\pm\infty, 1\}$. ו $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(ד) $$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n} + (-1)^n \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi n^2\right)}{2 + \sin\left(\frac{1}{2}\pi n^2\right)}$$

פתרון: נשים לב כי

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi n^2\right) = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$
$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi n^2\right) = \frac{1 - (-1)^n}{2}$$

כלומר

$$a_n = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k} + \frac{1}{2}, & n = 2k \\ \left(1 + \frac{1}{2k-1}\right)^{-(2k-1)}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

לכן קבוצת הגבולות החלקיים היא $\left\{\frac{1}{e}, e + \frac{1}{2}\right\}$, ו $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = e + \frac{1}{2}$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$.

8. ★ תהי $\{a_n\}$ סדרה כך ש $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = 0$. הראו כי קבוצת הגבולות החלקיים שלה היא הקטע $\left[\liminf\limits_{n\to\infty} a_n, \limsup\limits_{n\to\infty} a_n\right]$.

פתרון: נניח בשלילה כי קיימת נק' $x \in (l, L)$ כך ש a איננה גבול חלקי של $\{a_n\}$.

(א) לכן קיימים $\epsilon>0$ ו $N_1\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq N_1$ מתקיים $|a_n-a|\geq\epsilon$, בנוסף ניתן להניח כי מתקיים $l<a-\epsilon<a+\epsilon<L$.

(ב) לפי הנתון $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ קיים N_2 כך שמתקיים $|a_{n+1}-a_n|<\epsilon$ לכל $n\geq N_2$.

(ג) בתרגול ראינו כי מהנתון $l=\liminf\limits_{n\to\infty}a_n$ נובע כי קיים n_k כך שמתקיים $a_{n_k}<l+\epsilon<a$ ו $n_k>\max\{N_1,N_2\}$. לכן לפי ii:

$$a_{n_k+1}\leq a_{n_k}+|a_{n_k+1}-a_{n_k}|<a+\epsilon$$

(ד) לפי i מקבלים כי $a_{n_k+1}<a-\epsilon$. בנוסף מ ii ו i נובע כי לכל $n\geq n_k+1$ מתקיים $a_n\leq a-\epsilon$ (אחרת היינו מקבלים שקיים $a_n\in(a-\epsilon,a+\epsilon)$ בסתירה ל i, לא תיתכן "קפיצה" מעבר לתחום לפי ii). ראינו בתרגול כי מהנ"ל נובע כי $L=\limsup\limits_{n\to\infty}a_n\leq a-\epsilon<L$ וקיבלנו סתירה.

9. תהי $M\subset\mathbb{R}$ קבוצה סופית ולא ריקה. תנו דוגמא לסדרה כך ש M היא קבוצת הגבולות החלקיים שלה.
<u>פתרון:</u> נניח כי $M=\{a_1,\ldots,a_n\}$. הסדרה המחזורית $a_1,\ldots,a_n,a_1,\ldots,a_n,a_1,\ldots$ מקיימת את הדרוש.

10. תהיינה $\{x_n\},\{y_n\}$ סדרות חסומות. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) $-\limsup\limits_{n\to\infty}y_n=\liminf\limits_{n\to\infty}(-y_n)$
<u>פתרון:</u> נשתמש בסימון $\limsup\limits_{n\to\infty}y_n=Y$. לכן ידוע כי לכל $\epsilon>0$ נתון קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $y_n<Y+\epsilon$. בנוסף לכל $k\in\mathbb{N}$ קיים $n_k>k$ כך ש $y_{n_k}>Y-\epsilon$. כלומר לכל $n>N$ מתקיים כי $-y_n>-Y-\epsilon$, ולכל $k\in\mathbb{N}$ קיים $n_k>k$ כך ש $-y_{n_k}<-Y+\epsilon$, כלומר $\liminf\limits_{n\to\infty}(-y_n)=-Y$.

(ב) $\liminf\limits_{n\to\infty}x_n+\limsup\limits_{n\to\infty}y_n\leq\limsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leq\limsup\limits_{n\to\infty}x_n+\limsup\limits_{n\to\infty}y_n$
<u>פתרון:</u> נסמן $\liminf\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $\limsup\limits_{n\to\infty}x_n=X$ ו $\limsup\limits_{n\to\infty}y_n=Y$. צ"ל כי מתקיים:

$$x+Y\leq\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leq X+Y$$

<u>פתרון:</u> נראה את נכונות אי־השיוויונות: (אנו נעזרים בתנאים מספיקים/הכרחיים ל $\limsup,\liminf$ מהתרגול)

i. $x+Y\leq\limsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ ־ לכל $\epsilon>0$, לפי הנתון המ"מ מתקיים $x_n>x-\frac{\epsilon}{2}$ בנוסף קיימת תת־סדרה y_{n_k} המקיימת $y_{n_k}>Y-\frac{\epsilon}{2}$. לכן קיימת תת־סדרה $x_{n_k}+y_{n_k}$ המקיימת המ"מ: $x_{n_k}+y_{n_k}>a+B-\epsilon$, כלומר $\limsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\geq x+Y-\epsilon$. מכיוון שאי־השיוויון האחרון נכון לכל $\epsilon>0$ מקבלים את הדרוש.

ii. $\limsup_{n\to\infty} (x_n+y_n) \le X+Y$ לפי הגדרת $\limsup$ לכל $\epsilon>0$ המ"מ מתקיים $x_n < X+\frac{\epsilon}{2}$ ו $y_n < Y+\frac{\epsilon}{2}$, לכן המ"מ $x_n+y_n < X+Y+\epsilon$ ולכן $\limsup_{n\to\infty} (x_n+y_n) \le X+Y+\epsilon$.

11. הוכיחו כי אם תתי־הסדרות $\{a_{3n}\},\{a_{2n-1}\},\{a_{2n}\}$ של סדרה $\{a_n\}$מתכנסות, אזי הסדרה $\{a_n\}$מתכנסת.

<u>פתרון:</u> לפי משפט מההרצאה אם סדרה מתכנסת אזי כל תת־סדרה שלה מתכנסת לאותו הגבול כמו $\{a_n\}$. נסמן

$$\begin{aligned} a_{2n} &\to a \\ a_{2n-1} &\to b \\ a_{3n} &\to c \end{aligned}$$

מכיוון ש $\{a_{6n}\}$ היא תת־סדרה של $\{a_{2n}\}$ וגם של $\{a_{3n}\}$ נקבל מהמשפט כי $a=c$. באותו אופן מכיוון ש $\{a_{6n-3}\}$ היא תת־סדרה של $\{a_{2n-1}\}$ וגם של $\{a_{3n}\}$ נקבל $b=c$. לכן $a=b=c$. נראה כי $a_n \to a$. לכל $\epsilon>0$ קיימים N_1,N_2 כך שלכל $n\ge N_1$ מתקיים $|a_{2n}-a|<\epsilon$ ולכל $n\ge N_2$ מתקיים $|a_{2n-1}-a|<\epsilon$. לכן אם נבחר $N>2\cdot\max\{N_1,N_2\}$ לכל $n\ge N$, אם $n=2k$ אזי $k\ge N_1$ ולכן $|a_n-a|=|a_{2k}-a|<\epsilon$, אם $n=2k-1$, אזי $k\ge N_2$ ולכן $|a_n-a|=|a_{2k-1}-a|<\epsilon$.

12. ★ תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $|a_{n+1}-a_n|<2$ לכל n, $\liminf_{n\to\infty} a_n \le 1$ ו $\limsup_{n\to\infty} a_n \ge 4$. הוכיחו כי לסדרה $\{a_n\}$ לפחות שלושה גבולות חלקיים.

<u>פתרון:</u> ראשית נראה כי בקטע $[1.1,3.9]$ יש אינסוף איברים של הסדרה $\{a_n\}$. לפי הנתון עבור $\epsilon=0.1$, לכל $k\in\mathbb{N}$ קיימים $m_k>n_k>k$ כך ש $a_{n_k}<1+\epsilon=1.1$ ו $a_{m_k}>4-\epsilon=3.9$. כלומר קיים n כך ש $n_k<n<m_k$ עבורו $a_n\in[1.1,3.9]$ (מכיוון שלא ניתן ל"קפוץ מעל קטע באורך $3.9-1.1=2.8$ כאשר ההפרשים בין איברים עוקבים הם לכל היותר 2). מכיוון ש k שרירותי ו $n>k$ קיבלנו כי יש אינסוף איברים של $\{a_n\}$ בקטע $[1.1,3.9]$. כעת נראה כי ישנם אינסוף איברים של $\{a_n\}$ בקטע $[3.95,6]$. מהגדרת $\limsup$ נובע כי יש אינסוף איברים של $\{a_n\}$ הגדולים מ 3.95. אם רק מספר סופי מהם היה בקטע $[3.95,6]$ היינו מקבלים (מכיוון שאורך הקטע גדול מ 2) כי החל ממקום מסוים כל איברי $\{a_n\}$ גדולים או שווים ל 6 בסתירה לנתון $\liminf_{n\to\infty} a_n \le 1$. באופן דומה מראים כי יש אינסוף איברי $\{a_n\}$ בקטע $[-1,1.05]$. לפי משפט בולצנו־ווירשטרס בכל אחד מהקטעים הנ"ל יש תת־סדרה מתכנסת (אחרת), וברור כי הגבולות של כל תת סדרה שונים זה מזה. לכן לסדרה יש לפחות שלושה גבולות חלקיים.

13. הוכיחו את הטענות הבאות או מצאו דוגמא נגדית:

(א) אם $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = a$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

<u>פתרון:</u> נבחר למשל $a_n = (-1)^n$, לכן $\sum\limits_{k=1}^{n} a_n = \frac{-1+(-1)^n}{2}$, ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_n}{n} =$ 0, אבל הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ לא קיים.

(ב) $\{a_n\}$ סדרה חיובית. אם $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = a$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

<u>פתרון:</u> הסדרה $a_n = \begin{cases} 0, & n=0 \\ 1, & n \geq 1 \end{cases}$, מקיימת כי $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = 0$ אבל $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. אפשר גם לבחור $b_n = \begin{cases} 1, & n\,\mathrm{odd} \\ 2 & n\,\mathrm{even} \end{cases}$ בתור דוגמא נגדית אחרת.

(ג) $\{a_n\}$ סדרה חיובית. אם $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$.

<u>פתרון:</u> הסדרה $a_n = \begin{cases} 1, & n\,\mathrm{odd} \\ 2, & n\,\mathrm{even} \end{cases}$ מקיימת כי $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ אבל עבור n זוגי $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ ועבור n אי־זוגי $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ ולכן הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לא קיים.

(ד) לכל סדרה לא חסומה קיים גבול במובן הרחב.
<u>פתרון:</u> הסדרה $a_n = (-1)^n \cdot n$ איננה חסומה ולא קיים לה גבול במובן הרחב.