פתרון (חלקי) לתרגיל מס' 6 - חדו"א 1

1. נשים לב ש- $\frac{1}{2}b_n = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-2} < 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1} = a_n$. הסדרה b_n היא למעשה הטור ההרמוני, וראינו כי היא שואפת ל-∞. מגרסת אינסוף של משפט הסנדביץ' נקבל כי גם a_n שואפת לאינסוף. (מי שרוצה יכול לנסח זאת בשפה של טורים - משפט ההשוואה.)

2. (א) יהי $\epsilon > 0$. מקריטריון קושי, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n,m > N$, $|a_n - a_m| < \epsilon$. בפרט, אם $n > N$ נוכל לבחור $m = 2n > N$, ולקבל ש-$|a_n - a_{2n}| < \epsilon$. כלומר עבור הסדרה $b_n = a_n - a_{2n}$ מצאנו N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|b_n| < \epsilon$, כלומר $b_n \to 0$.

   (ב) הכיוון ההפוך לא נכון! למשל, נקח סדרה $a_n = 1$ אם $n = 3k$ (כלומר אם n מתחלק ב-3), ואחרת $a_n = 0$. זו ודאי סדרה לא מתכנסת. אך נשים לב ש-n מתחלק ב-3 אמ"מ $2n$ מתחלק ב-3, ולכן תמיד $a_n = a_{2n}$.

3. דומה לתרגיל שנפתר בתרגול.

4. (א) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cdots = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \longrightarrow \frac{1}{4} < 1$, לכן ממבחן המנה הטור מתכנס (היזכרו בתרגיל שהיה בעבר - להוכיח שהאיבר הכללי שואף לאפס. עכשיו חיזקנו זאת).

   (ב) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{-\frac{1}{m}}}{(4n^2+6n+2)^{\frac{1}{k}}} = \left(\frac{n^2+2n+1}{(4n^2+6n+2)^{2m/k}}\right)^{\frac{1}{2m}}$. אם $2m = k$ אז הביטוי שואף ל-$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}m} < 1$ ולכן הטור מתכנס ממבחן השורש. אם $2m > k$ אז הביטוי שואף ל-0 ולכן גם הטור מתכנס, אם $2m < k$ אז הביטוי שואף לאינסוף ולכן הטור מתבדר.

   (ג) מאי שויון שראינו בכיתה $\frac{n+1}{2} \leq \sqrt[n]{n!}$, או $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{2}{n+1}$. אבל הטור $\sum \frac{2}{n+1}$ טור חיובי מתבדר, לכן ממבחן ההשוואה גם הטור שלנו מתבדר. (מי שלא ראה את אי-השויון, יש לכך הוכחה באינדוקציה.)

   (ד) מהצד השני של אותו אי-שויון $\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{4}$, ולכן $\frac{1}{n!^{2/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}^{\,2}} \geq \frac{4^2}{(n+1)^2}$. כלומר האיבר הכללי של טורנו קטן מאיבר של טור מתכנס, לפי מבחן ההשוואה גם טורנו מתכנס.

   (ה)
$$\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} = \frac{1}{(n+a)^b(1+\frac{a}{n})^n(n+b)^a(a+\frac{b}{n})^n}$$
   ממבחן ההשוואה בצורה גבולית רואים שטור זה מתכנס אמ"מ הטור $\sum \frac{1}{n^{a+b}}$ מתכנס, כלומר אמ"מ $a + b > 1$.

   (ז) נסתכל על הטור המעובה: $\sum 2^n \frac{1}{2^n (\log 2^n)^\alpha} = \sum \frac{1}{(\log 2)^\alpha} n^\alpha$. עבור $\alpha > 0$ תנאי מבחן העיבוי מתקיימים (הסדרה של איברי הטור יורדת) ואז נקבל שהטור המקורי מתכנס עבור $\alpha > 1$ ומתבדר עבור $0 < \alpha \leq 1$.
   אם $\alpha < 0$ אז נשווה: $\frac{1}{n(\log n)^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ ומכיוון שהטור ההרמוני מתבדר כך גם שלנו.

5. נסמן $c_n = \frac{a_n}{b_n}$. מהנתון, לכל $n \geq n_0$, $c_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n} = c_n$. אזי החל ממקום מסויים הסדרה c_n מונוטונית יורדת, ומכאן שהיא חסומה מלמעלה (אחרת היתה לה תת־סדרה שואפת לאינסוף, וזה לא יתכן כי מדובר בסדרה מתכנסת למספר סופי או למינוס אינסוף). כלומר, קיים c כך ש־$0 < c_n < c$ לכל n טבעי. אזי $\sum a_n = \sum c_n b_n < c \sum b_n$, ונסיים לפי מבחן ההשוואה.

6. (א) נשתמש במבחן של שאלה קודמת עם a_n הנתונה ו־$b_n = \frac{1}{n^2}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n-2}}{e} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

הטור $\sum b_n < \infty$ ולכן גם הטור שלנו מתכנס.

(ב) בדומה, אך בשימוש הפוך:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n}}{e} > \frac{(1+\frac{1}{n})^{n}}{1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

כאשר נגדיר $b_n := \frac{1}{n}$. לו היה הטור שלנו מתכנס, הוא היה גורר התכנסות של הטור ההרמוני, וזו היתה סתירה. לכן הוא מתבדר.

7. (א) מאי־שיוויון הממוצעים: $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$, ואז ממבחן ההשוואה נקבל $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} < \infty$.

(ב) נגדיר $a_n = 1$ אם n אי־זוגי, ו־$a_n = 1/n^4$ אם n זוגי. האיבר הכללי לא שואף לאפס, לכן $\sum a_n = \infty$. אבל

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k a_{k+1}} < \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \infty$$

אזי ממבחן ההשוואה הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} < \infty$.

(ג) אם a_n יורדת אז $\sqrt{a_n a_{n+1}} \geq \sqrt{a_{n+1}^2} = a_{n+1}$, ואז אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס, גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

8. (א) $\frac{a_n}{1+n^2 a_n} \leq \frac{a_n}{n^2 a_n} = \frac{1}{n^2}$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, ולכן $\sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n} < \infty$.

(ב) אם הסדרה חסומה, כלומר $\exists M > 0 : |a_n| < M$, אזי $\frac{a_n}{1+a_n^2} \geq \frac{a_n}{1+M^2}$. כיוון ש־$\sum a_n = \infty$, נקבל שגם $\sum \frac{a_n}{1+a_n^2} = \infty$.

אם הטור לא חסום, לא יודעים: למשל, עבור $a_n = n$ הטור מתבדר, ואם $a_n = n^2$ הטור מתכנס.

9. (א) מתקיים $|a_n| = 2p_n - a_n$. לו היה מתקיים $\sum p_n < \infty$, היינו מקבלים ש־$\sum |a_n| < \infty$ אבל זו סתירה לנתון. כנ"ל עבור $\sum q_n$.

(ב) מתקיים $q_n + a_n = p_n$. נסמן $S_n = a_1 + \cdots + a_n$.

$$\frac{P_n}{Q_n} = \left(1 + \frac{S_n}{Q_n}\right) \to 1$$

(מכיוון שידוע ש־$S_n \to L < \infty$, $P_n, Q_n \to \infty$.)

10. (א) הטור מתכנס בתנאי (דומה למה שראיתם בתרגול.)
(ב) הטור מתכנס בהחלט ($\sum \frac{1}{n^2} < \infty$), ובפרט מתכנס.
(ג) אם $|a| > 1$ מבחן השורש יתן: $\sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{a^{n^2}}\right|} = \frac{n}{|a|^n} \to 0$, לכן הטור מתכנס בהחלט.
(ד) אם $|a| \le 1$, $\left|\frac{n^n}{a^{n^2}}\right| \to \infty$, לכן האיבר הכללי לא שואף לאפס, אז אין התכנסות של הטור.
(ה) נבדוק התכנסות בהחלט תחילה. נפעיל מבחן שורש: $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} - 1 \to 0 < 1$, לכן הטור מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס.

11. (א) יהי $\beta > 1$. נשים לב ש־

$$\frac{a_n}{S_n^\beta} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n \cdot S_n^{\beta-1}}$$

(תחת המוסכמה ש־$S_0 = 0$). עבור n מספיק גדול $S_n > 1$. כמו כן קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$0 < \frac{1}{k} < \beta - 1$. אז

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{S_n \cdot S_n^{\beta-1}} \le \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n \cdot S_n^{1/k}}$$

לכן אם נוכיח שלכל $k \in \mathbb{N}$ הטור מימין מתכנס, נקבל ממבחן ההשוואה שגם $\sum \frac{a_n}{S_n^\beta}0$ מתכנס.
(ב) קחו $x = S_n^{1/k},\ y = x = S_{n-1}^{1/k}$ בזהות הנתונה, ושימו לב ש־$S_n^{\frac{k-1}{k}} \le x^j y^{k-1-j}$. לכן:

$$S_n^{1/k} - S_{n-1}^{1/k} \ge \frac{S_n - S_{n-1}}{\sum_{j=0}^{k-1} x^j y^{k-1-j}} \ge \frac{S_n - S_{n-1}}{k S_n^{\frac{k-1}{k}}}$$

(ג)

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n \cdot S_n^{1/k}} \le \sum_{n=0}^{m} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^{(k-1)/k}} \cdot \frac{1}{S_n^{1/k} S_n^{1/k}} \le$$
$$\le \sum_{n=1}^{m} k\left(\frac{1}{S_{n-1}^{1/k}} - \frac{1}{S_n^{1/k}}\right) = k\left(\frac{1}{a_n^{1/k}} - \frac{1}{S_m^{1/k}}\right) \to \frac{k}{a_1^{1/k}}$$

השתמשנו כאן בסעיף ב', ובטור טלסקופי. לכן הטור בסעיף א' מתכנס.

12. (א) נזכור ש־$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ וגם $\lim a^{-1/n} = 1$. על כן, לכל $\epsilon > 0$ קיים M כך ש־$|1 - a^{1/M} < \epsilon$ וגם $|1 - a^{-1/M}| < \epsilon$. (למעשה יש M כך שהחל ממנו ההפרש קטן מאפסילון, אבל לא נצטרך זאת.) כיון ש־$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ קיים N כך שלכל $n > N$, $|h_n| < \frac{1}{M}$. כעת נשתמש בתכונת מונוטוניות של חזקות רציונליות:

$$1 - \epsilon < a^{-1/M} < a^{h_n} < a^{1/M} < 1 + \epsilon.$$

(ב) מהגדרת הקבוצות כל איבר ב־A קטן מכל איבר ב־B, ולכן ניתן להסיק $\sup a^A \leq \inf a^B$. לכן, מספיק להראות שלכל $\epsilon > 0$ קיימים $r \in A, s \in B$ כך ש $a^s - a^r < \epsilon$. נבחר $K > x$ טבעי.

$$a^s - a^r = a^r(a^{s-r} - 1) < a^K(a^{s-r} - 1)$$

בדומה לסעיף א' יש M כך ש־$|a^{1/M} - 1| < \frac{\epsilon}{a^K}$. אם $s - r < \frac{1}{M}$, אז כמו שם נקבל $a^{s-r} - 1 < a^{1/M} - 1 < \frac{\epsilon}{a^K}$, ולכן $a^r - a^s < a^K(a^{s-r} - 1) < \epsilon$.

(ג) מסעיף ב' נובע שלכל $\epsilon > 0$ קיימים $r \in A, s \in B$ כך ש־ $|a^r - a^s| < \epsilon$. נקח N כך שלכל $n > N$, $r < x_n < s$ (שימו לב שבהכרח $r < x < s$ מהגדרת הקבוצות A, B). מחוקי חזקות רציונליות $a^r < a^{x_n} < a^s$. מצד שני, מהבניה $a^r < a^x < a^s$ ולכן $|a^{x_n} - a^x| < \epsilon$.

(ד) נקח סדרות של רציונלים $s_n \to x,\ r_n \to y$. מארתימטיקת גבולות ומהסעיפים הקודמים נקבל:

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n+s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}a^{s_n} = a^x a^y$$