פתרונות (מקוצרים) של תרגיל8 בחדוו"א-1

1.א) לא בהכרח: a) $f(x)=-g(x)$; b) $f(x)=sign(x); g(x)= sign(x)$ כאשר $sign(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

ב) *a)* נכון (אפשר להוכיח בשלילה). *b)* לא בהכרח: $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ ו- $g(x)=\begin{cases}0, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$.

2. א) סליקה ב- $x=2$; ב) אי רציפות מסוג 2 ב- $x=0$; ג) אי רציפות מסוג 2 ב- $x=0$;

ד) אי רציפות סליקה ב- $x=0$; ה) רציפה, אם A=0, סליקה אחרת; ו) אי רציפות מסוג 2 ב- $x=0$.

3. קיים A כך ש- $|f(x)|<|M|+1$ עבור $x>A$ וקיים M_1(מפני הרציפות בקטע סגור) שעבור

$0\leq x\leq A$ מתקיים : $|f(x)|<M_1$ וכן $|f(x)|<\max(|M|+1,\ M_1)$.

4. א) מספיק לבחור $\delta=K^{-1}\varepsilon$.

ב) נוכיח שסדרה $\{x_n\}$ היא סדרה קושי $|x_{n+1}-x_n|=$

$=|f^{n+1}(x_1)-f^n(x_1)|\leq K^n|f(x_1)-x_1|=K^n|x_2-x_1|$;

$|x_{n+m}-x_n|\leq K|x_{n+m}-x_{n+m-1}|+\cdots+K|x_{n+1}-x_n|\leq$

$K^{n+m-1}|x_2-x_1|+K^{n+m-2}|x_2-x_1|+\ldots+K^n|x_2-x_1|=\frac{K^n}{1-K}|x_2-x_1|\rightarrow 0$

לכן קיים גבול x_0 . נקודה הינה נק' שבת:

$|f(x_0)-x_n|=|f(x_0)-f(x_{n-1})|\leq K|x_0-x_{n-1}|\rightarrow 0$. כל לראות שנקודת שבת יש

רק אחת: אם x_0, y_0 הן נק' שבת אז: $|x_0-y_0|=|f(x_0)-f(y_0)|\leq K|x_0-y_0|$ ו-

$|x_0-y_0|=0$.

5. נגדיר: $\varphi(x)=f(x)-A\in C[a,b]$. $\varphi(x)>0$ ב- $[a,b]$ וכן קיים $\min_{x\in[a,b]}\varphi(x)=d>0$

ניקח $c=\frac{d}{2}$ ו- $f(x)>A+c$ מש"ל.

6. נניח בשלילה שלמשוואה $f(f(x))=0$ יש פתרון אך אין שורשי המשוואה $f(x)=x$.

לכן $f(x)-x$ שומרת סימן, נאמר חיובית. כלומר $\forall x:\ f(x)>x$ וכן $f(f(x))>f(x)>x$

ואין פתרונות ל- $f(f(x))=0$.

7. א) נתבונן ב- $f(x)=x^3+3x^2-2$; ברור ש- *f(x)* רציפה; *f(0)=-2<0 ; f(1)=2>0* . לכן

קיים שורש בקטע [0,1] לפי משפט קושי (ערך ביניים).

ב) האיבר הראשי $a_{2n+1}x^{2n+1}$ בפולינום שואף ל- $(+\infty)\ sign(a_{2n+1})$ כאשר $x\rightarrow+\infty$

ול- $(-\infty)\ sign(a_{2n+1})$ כאשר $x\rightarrow-\infty$. הוא רציף, מחליף סימן לכן מתאפס בנק' מסוימת.

8. לכל $x_0\in R\backslash Q$ קיימות תתי-סדרות $\{r_n, r_n\in Q\}\rightarrow x_0$ אזי $g(r_n)=f(r_n)\rightarrow f(x_0)$ לכן

$g(x_0) = f(x_0)$.

9. דוגמה נגדית: $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{2}}$ רציפה ב- Q אך אינה חסומה בקטע [1,2] .

10. נציב $x_1 = x_2 = 0$ נקבל: $(f(0))^2 = \mathrm{f}(0)$, כלומר יש 2 אפשרויות: $f(0) = 0 \;\; or \; f(0) = 1$.

אם *f(0)=0* אז לכל $\forall x \in R \;\; f(x) = 0$. אם $f(0) = 1$ אזי $f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f^2(\frac{x}{2}) > 0$

נסמן $f(1) = a$ לכן $f(n) = f(1+1+\cdots+1) = f^n(1) = a^n$. באתה דרך: $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$

וכן $f\left(\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{m}{n}}$. אם $\alpha \in R\backslash Q$ נקח סדרה $\{r_n\} \to \alpha$, $r_n \in \mathrm{Q}$, אזי לפי הרציפות f(x)

$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = f(\alpha)$ (למה גבול לא תלוי בסדרה $\{r_n\}$?).

11. א) נתבונן ב- $\varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}+\frac{\mathrm{T}}{2}) \;\; -f(x)$ בקטע $[0,\frac{\mathrm{T}}{2}]$. היא רציפה ומספיק להוכיח קיומו של שורש שלה. אם לא קיים שורש אז הפונקציה $\varphi(\mathrm{x})$ שומרת סימן, נאמר חיובית. לכן

$\varphi\left(\frac{\mathrm{T}}{2}\right) + \varphi(0) = \mathrm{f}(\mathrm{T}) - f(0) > 0$, מה שסותר את המושג של מחזור.

ב) כבסעיף א) נתבונן ב- $\varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}+\frac{1}{\mathrm{n}}) \;\; -f(x)$ בקטע $[0; \frac{n-1}{\mathrm{n}}]$, היא רציפה ומספיק לקבוע

קיומו של שורש. אם הוא לא קיים אז $\varphi(\mathrm{x})$ שומרת סימן, נאמר שלילית. לכן

$\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(\frac{k}{n}) = \mathrm{f}(1) - \mathrm{f}(0) < 0$. אבל $f(0) = f(1)$. לכן $\varphi(\mathrm{x})$ מתאפסת בנקודה מסוימת.

12. א) $f(x)$ רציפה בקטע סגור וכן רציפה במ"ש לפי מש' קנטור.

ב) אינה רציפה במ"ש מפני שלא חסומה בתחום סופי.

ג) רציפה במ"ש כי $\forall x_1 > x_2 : arctan(x_1)$ - $arctan(x_2) < x_1 - x_2$ (δ = ε).

ד) רציפה במ"ש מפני ש- $f(x)$ רציפה במ"ש ב- [0, 1] כרציפה וב- (∞ ; 1] כי 1< $\forall x_1 > x_2$

$0 < f(x_1) - f(x_2) < x_1 - x_2$. הפונקציה רציפה במ"ש באיחוד של שני תתי-התחומים.

ה) רציפה במ"ש.

ו) רציפה אך לא רציפה במ"ש. נבנה סידרה $\{x_n\}$ כך ש- $|x_{n+1} - x_n| = \delta_n \to 0$ ו-

$\left|\sin(x_{n+1}^2) - \sin(x_n^2)\right| = 1$: $x_n = \sqrt{n\frac{\pi}{2}}$.

13. א)ו- ב) הוכח בארצה.

14.א) $f(x) \in C[0;T]$ ולכן היא רציפה במ"ש בקטע. אבל δ שמתאים ל- $\varepsilon/2$ בקטע $[0, T]$

מתאים ל- ε בכל ציר. (אם $x_1 \in [(k-1)T, kT]$ ו $-$ $x_2 \in [kT, (k+1)T]$ אז $|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - f(kT)| + |f(kT) - f(x_2)| < \varepsilon$). מקרה אחר δ שמתאים ל- $\varepsilon/2$.

ב) לכל $\varepsilon/2$ קיים $M>0$ כך ש- M < $\forall x_1 > x_2 >$ מתקיים: $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon/2$. בקטע

[M, 0] פונקציה רציפה במ"ש. המשך ההוכחה שיגרתי: הדבקת שני תתי-התחומים.

15. אם $f(x)$ אינה רציפה במ"ש אזי גם כל $g(x)$ לא רציפה במ"ש בתחום משותף ולכן

לא רציפה במ"ש בתחום רחב יותר.

בכיוון השני הוכיחו שאם $f(x)$ רציפה במ"ש ב - Q אז לכל $\alpha \in R \backslash Q$ קיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ כאשר

$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. (רמז: סדרה $\{f(x_n)\}$היא סדרת קושי.) ונגדיר $g(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

נשאר לבדוק ש- $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ לא תלוי בבחירת הסדרה $\{x_n\}$.