פתרונות חלקיים לתרגיל 9

29 בדצמבר 2010

1. נבדוק גבולות חד־צדדיים ב- 0 (רק שם יש בעיה):

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\alpha x)^{\frac{\alpha}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\left((1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right)^{\alpha^2} = e^{\alpha^2}$$
$$\lim_{x\to 0^-} e\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) = e$$

לכן f רציפה ב- $x=0$ אם ורק אם $e=e^{\alpha^2}=\beta$, כלומר $\alpha=\pm 1,\ \beta=e$.

2. א. $A\subseteq[a,b]$, לכן היא חסומה. $a\in A$, לכן A לא ריקה. לכן קיים $s=supA$.
ב. יש סדרה $x_n\to supA=s$, $x_n\in A$. f רציפה, לכן $f(x_n)\to f(s)$. לכל n $f(x_n)\geq 0$. לכן $f(s)\geq 0$.
נניח בשלילה ש- $f(s)>0$. בפרט $s<b$. f רציפה ב- s, ולכן קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $f(s+\varepsilon)>0$. לכן $A\ni s+\varepsilon > s = supA$, וזאת סתירה. לכן $f(s)=0$.
ג. מצאנו $s\in(a,b)$ המקיים $f(s)=0$, ולכן קיבלנו את משפט ערך הביניים.

3. א. $\lim_{x\to 1^-} f(x)=e-1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$. f רציפה בקטע הפתוח והגבולות בקצוות קיימים, לכן היא רציפה במ"ש בקטע.
ב. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$. לכן אפשר להרחיב את f לפונקציה רציפה בקטע $[0,\infty)$. $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, לכן מתרגיל שהיה לנו בתרגול f רציפה במ"ש ב- $[0,\infty)$. לכן היא רציפה במ"ש ב- $(0,\infty)$.
ג. נגדיר $x_n=2\pi n,\ y_n=2\pi n+\frac{1}{n}$. $|x_n-y_n|\to 0$, ועבור n מספיק גדול $\frac{sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\geq 0.5$

$$|f(x_n)-f(y_n)| = (2\pi n+\frac{1}{n})sin(2\pi n+\frac{1}{n}) = (2\pi n+\frac{1}{n})sin(\frac{1}{n}) \geq$$
$$\geq 2\pi n sin(\frac{1}{n}) = 2\pi\frac{sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \geq 2\pi\cdot 0.5 = \pi$$

לכן f אינה רציפה במ"ש.

4. א. נגדיר $g(x)=f(x)-x$. $g(0)\geq 0-0=0$. $g(1)\leq 1-1=0$. אם $g(0)=0$ או $g(1)=0$ סיימנו. אחרת, מכיוון ש- g רציפה כהפרש רציפות, ממשפט ערך הביניים קיים $x_0\in(0,1)$ כך ש- $g(x_0)=0$, ולכן $f(x_0)=x_0$.

ב. נניח בשלילה ש- f לא קבועה, כלומר יש $x<y$ כך ש- $f(x)\neq f(y)$. נבחר $z\notin\mathbb{Q}$ בין $f(x)$ ל- $f(y)$. מכיוון ש- f רציפה, ממע"ב קיים $x<\xi<y$ כך ש- $f(\xi)=z\notin\mathbb{Q}$ - סתירה.
ג. נסמן $M=max\{f(x_1),\dots,f(x_n)\}$, $m=min\{f(x_1),\dots f(x_n)\}$, $a=\frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n}$. מתקיים $m\leq a\leq M$. נניח $M=f(x_k)$, $m=f(x_l)$. אם $a=m$ או $a=M$ אז x_l או x_k הם כנדרש. אחרת, מכיוון ש- f רציפה, ממשפט ערך הביניים קיים $c\in[min\{x_k,x_l\},max\{x_k,x_l\}]$ כך ש- $f(c)=a$.

5. א. נניח (x_n) סדרת קושי, אז לכל $\delta>0$ קיים N כך שלכל $n,m\geq N$ מתקיים $|x_m-x_n|<\delta$. f רציפה במ"ש, לכן לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שאם מתקיים $|x_m-x_n|<\delta$ אז מתקיים $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$. סה"כ לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n,m\geq N$ מתקיים $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$, לכן $(f(x_n))$ סדרת קושי.
ב. נניח בשלילה ש- f לא רציפה במ"ש. אז יש $\varepsilon>0$ כך שלכל n יש $x_n,x'_n\in A$ המקיימים $|x_n-x'_n|<\frac{1}{n}$ ו- $|f(x_n)-f(x'_n)|\geq\varepsilon$.
A חסומה, לכן מבולצאנו־ווירשטראס יש תת"ס מתכנסת $x_{n_k}\to x_0$, ואז $-\frac{1}{n_k}+x_{n_k}<x'_{n_k}<\frac{1}{n_k}+x_{n_k}$, לכן מסנדוויץ' גם $x'_{n_k}\to x_0$. הסדרה (y_k) עם האיברים $x_{n_1},x'_{n_1},x_{n_2},x'_{n_2},\dots$ מתכנסת, ולכן קושי. אבל $|f(x_{n_k})-f(x'_{n_k})|\geq\varepsilon$, לכן $(f(y_k))$ לא קושי, סתירה. התנאי של החסימות הכרחי, אחרת אפשר לקחת למשל $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. f לא רציפה במ"ש, אבל אם (x_n) סדרת קושי, אז (x_n) חסומה, לכן יש $M>0$ כך ש- $|x_n|\leq M$ לכל n, וכמו כן לכל $\varepsilon>0$ יש N כך שלכל $n,m\geq N$ מתקיים $|x_m-x_n|<\frac{\varepsilon}{2M}$, ואז לכל $n,m\geq N$ מתקיים:

$$|x_n^2-x_m^2|=|x_n-x_m||x_n+x_m|\leq\frac{\varepsilon}{2M}(|x_n|+|x_m|)\leq\frac{\varepsilon}{2M}\cdot 2M=\varepsilon$$

לכן גם $(f(x_n))$ סדרת קושי.

6. יהי $T>0$ מחזור של f. מרציפות f בקטע $[0,T]$, מווירשטראס, f מקבלת מינימום בנקודה x_1 בקטע, נאמר $f(x_1)=m$, ומקסימום בנקודה x_2, נאמר $f(x_2)=M$. אבל לכל $x\in\mathbb{R}$, קיים $n\in\mathbb{Z}$ כך ש- $x=nT+\delta$, כאשר $0\leq\delta<T$, ולכן $f(x)=f(nT+\delta)=f(\delta)$, ולכן $m\leq f(x)=f(\delta)\leq M$. לכן f מקבלת מינימום ומקסימום ב- $\mathbb{R}$, והם מתקבלים ב- x_1,x_2.

8. א. יש $x_{n_k}\to\limsup\limits_{n\to\infty}x_n$. f רציפה, לכן $f(x_{n_k})\to f(\limsup\limits_{n\to\infty}x_n)$, לכן $\limsup\limits_{n\to\infty}f(x_n)\leq f(\limsup\limits_{n\to\infty}x_n)$.
ג. יהי $\varepsilon>0$. נסמן $a=\limsup\limits_{n\to\infty}x_n$. f רציפה ב- a, לכן קיים $\delta>0$ כך שלכל $|x-a|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. קיים N כך שלכל $n\geq N$ מתקיים $x_n<a+\frac{\delta}{2}$, ומכיוון ש- f עולה, אז גם $f(x_n)\leq f(a+\frac{\delta}{2})$, ולכן לכל $n\geq N$ מתקיים $f(x_n)-f(a)\leq f(a+\frac{\delta}{2})-f(a)<\varepsilon$. לכן $\limsup\limits_{n\to\infty}f(x_n)\leq f(a)+\varepsilon$. זה נכון לכל $\varepsilon>0$, ולכן $\limsup\limits_{n\to\infty}f(x_n)\leq f(a)=f(\limsup\limits_{n\to\infty}x_n)$. עבור סעיף ב' באופן דומה.

9. א. נגדיר $f(x)=(1-x)\cos x-\sin x$ רציפה ב- $\mathbb{R}$ (אלמנטרית). $f(0)=1>0$, $f(1)=-\sin 1<0$, לכן ממע"ב יש $x_0\in(0,1)$ כך ש- $f(x_0)=0$, ואז x_0 פיתרון.
ב. מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}|p(x)|=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}|p(x)|=\infty$, לכן ממע"ב יש $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש- $e^{-x_0}|p(x_0)|=1$, ולכן $|p(x_0)|=e^{x_0}$.

10. נסתכל על קו־המשווה כעל הקטע $[0,2\pi]$, ועל פונקציית הטמפרטורה כעל $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ רציפה המקיימת $f(0)=f(2\pi)$. אם $f(0)=f(\pi)$ סיימנו. אחרת, נניח $f(0)>f(\pi)$ (המקרה השני סימטרי). נגדיר $g:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ $g(x)=f(x)-f(x+\pi)$ רציפה (כהפרש והרכבת רציפות). $g(0)=f(0)-f(\pi)>0$. $g(\pi)=f(\pi)-f(2\pi)=f(\pi)-f(0)<0$, לכן ממע"ב יש x_0 כך ש- $g(x_0)=0$. לכן $f(x_0)=f(x_0+\pi)$.