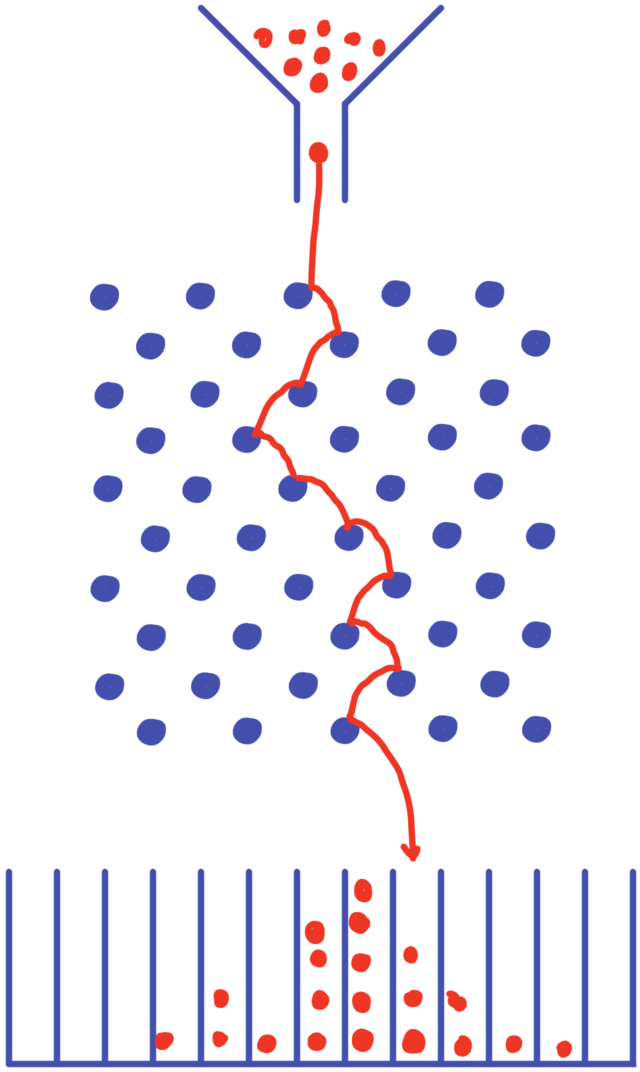
## הרצאה 1: כיצד לנבא התנהגות רנדומית של מערכת דטרמיניסטית?

### דוגמה 1: לוח Galton



התופעה: הכדורים יוצרים פעמון גאוסי.

המודל ההסתברותי: כל כדור מבצע "הילוך מקרי" בו הסטיות ימינה או שמאלה עקב ההתנגשויות בלתי תלויות ⟸ התפלגות סכום הסטיות היא גאוסית

הבעיה התאורטית: הכדור נשלט ע"י חוקי המכניקה הקלאסית שהם דטרמיניסטיים. ההתנגשויות אינן מקריות ואינן בלתי תלויות.

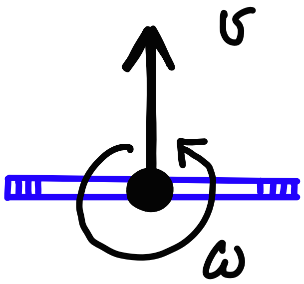
$$\boxed{\text{מהו אם כן מקור הצלחת המודל ההסתברותי?}}$$

## דוגמה 2: הטלת מטבע

<u>התופעה</u>: אם מטילים הרבה מטבעות בערך חצי מהם נופל על צד אחד וחצי על הצד השני

<u>המודל ההסתברותי</u>: המטבע <u>מקרי</u>!

<u>המודל המכני</u>: המטבע <u>דטרמיניסטי</u>!




כשזורקים את המטבע מעניקים לו

- מהירות אנכית $v$
- מהירות זוויתית $\omega$
- מספר הסיבובים באוויר $N$ נקבע לחלוטין ע"י $\omega, v$

$\Longleftarrow$ אם הוא זוגי מקבלים תוצאה אחת

אם הוא אי-זוגי מקבלים תוצאה אחרת

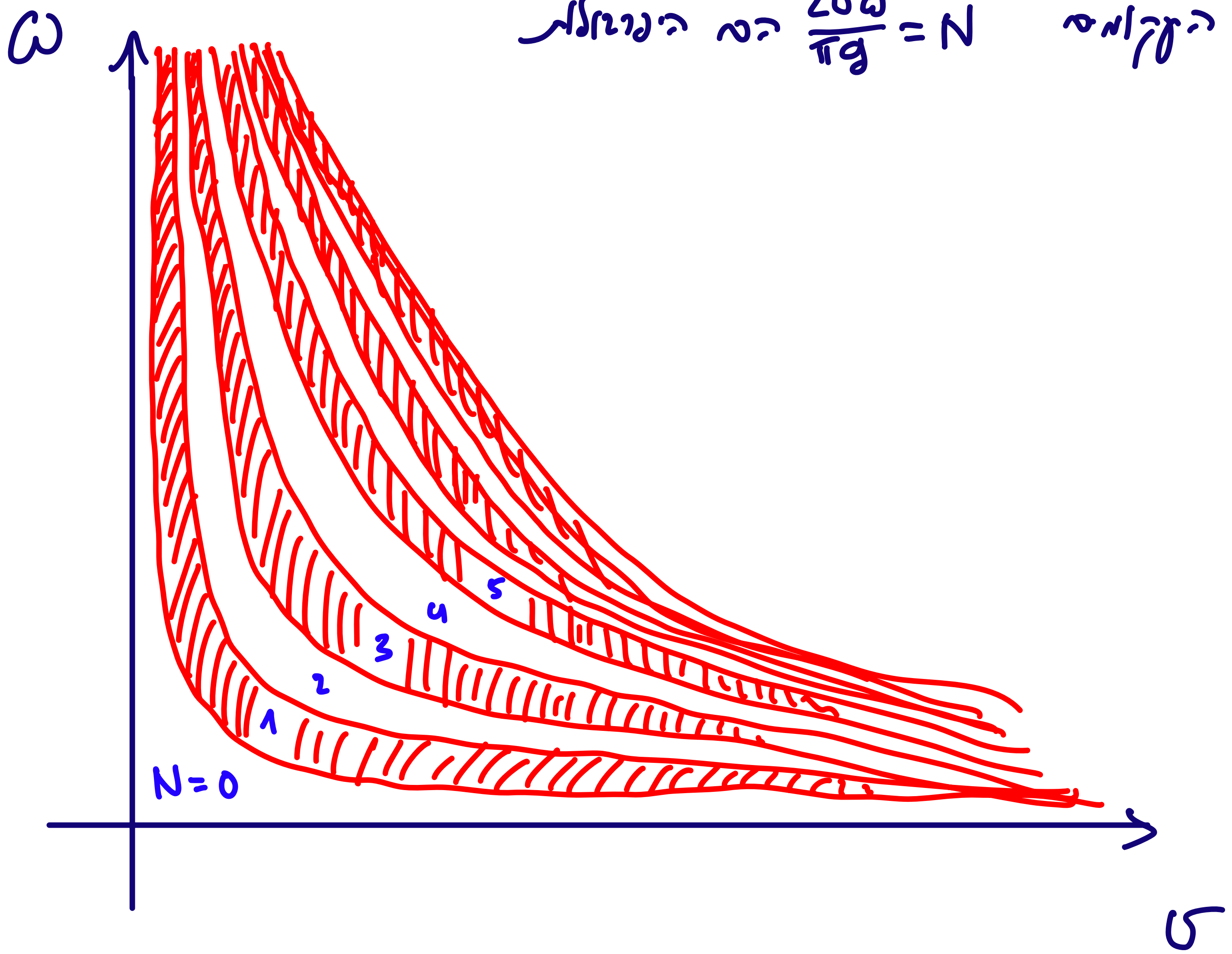
$\boxed{\text{מהו אם כן מקור הצלחת המודל ההסתברותי?}}$

נחשב!

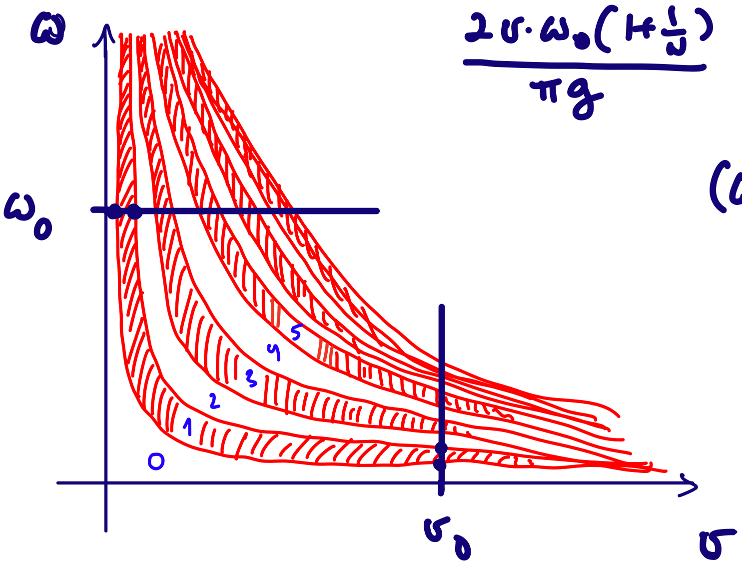
- הזמן שלוקח למטבע להגיע לשיא הגובה: $v-gt=0$, $\boxed{t = v/g}$
- <u>זמן כולל באוויר</u>: $\boxed{T = 2t = 2v/g}$
- <u>מספר סיבובים ב-$180^\circ$</u>: $N = \lfloor \omega T \rfloor = \left\lfloor \frac{2v\omega}{\pi g} \right\rfloor$.

מסקנה: אם $N \le \frac{2v\omega}{\pi g} < N+1$ והיו $N$ פתרונות

העקומים $\frac{2v\omega}{\pi g} = N$ הם היפרבולות




עובדה: כש $N \to \infty$ המרחק האופקי והאנכי בין ההיפרבולות שואף לאפס:




אם $\frac{2v\omega_0}{\pi g} = N$, אז $\frac{2v\cdot\omega_0(1+\frac{1}{N})}{\pi g} = N+1$

כלומר, $(\omega_0, v_0)$ ו- $(\omega_0 + \frac{\omega_0}{N}, v_0)$

על היפרבולות סמוכות

$\Rightarrow$ המרחק האופקי קטן מ- $\frac{\omega_0}{N}$.

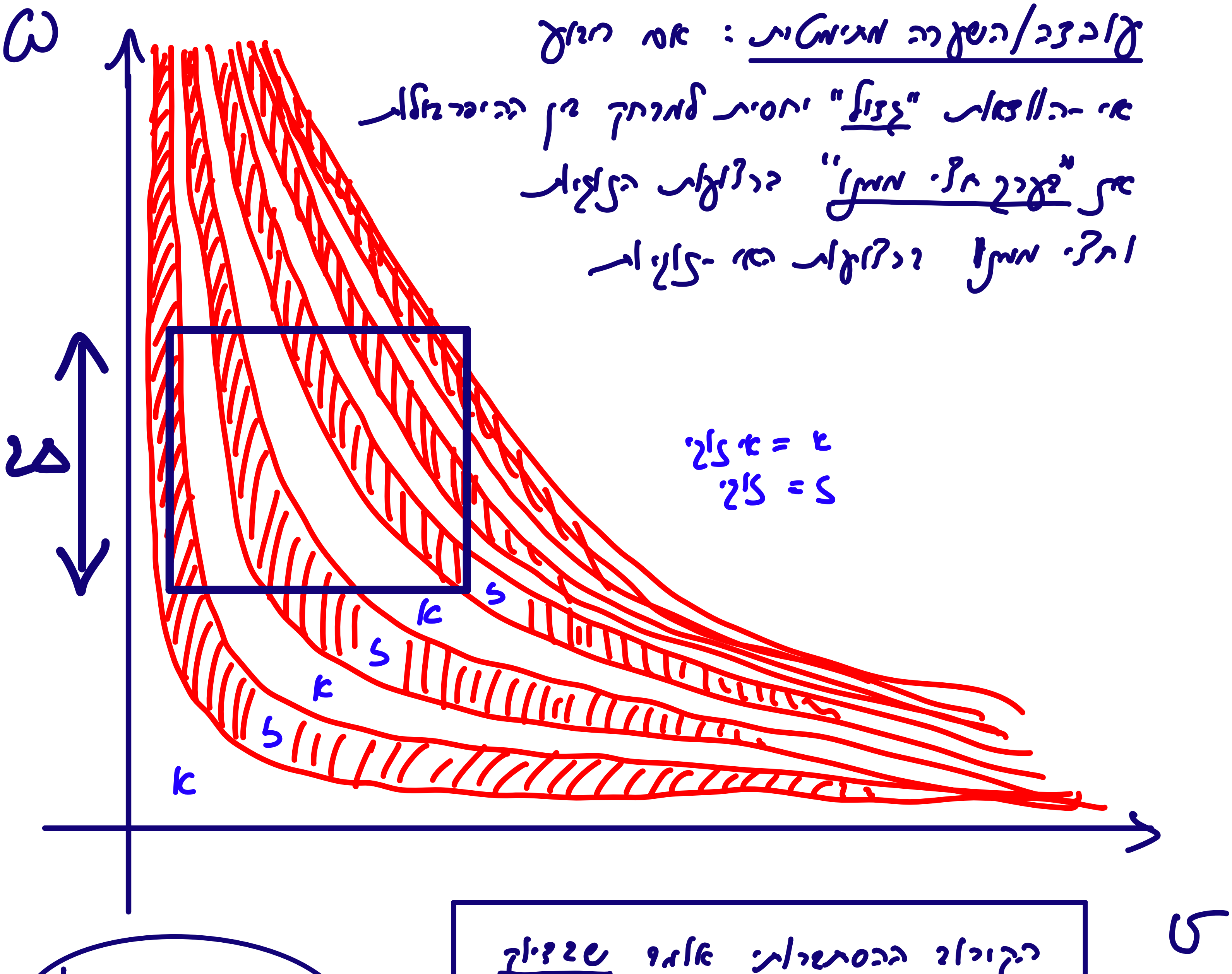
**מסקנה**: כדי לדעת באיזה תנאי ההתחלה $(\omega,\sigma)$ נופל ברצועה זוגית או אי-זוגית צריך לדעת את $(\omega,\sigma)$ **בדיוק גבוה מאוד**.

– מכיוון שאין לנו את הדיוק הזה אנחנו רק יודעים

$$\sigma = \sigma_0 \pm \Delta$$
$$\omega = \omega_0 \pm \Delta$$

, $\Delta >>$ עובי הרצועות

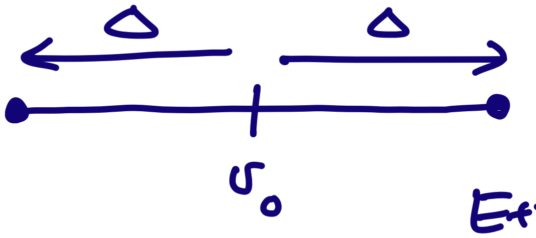
**עובדה/השערה מתימטית**: אם תחום אי-הוודאות "**גדול**" יחסית למרחק בין ההיפרבולות אז "**בערך חצי ממנו**" ברצועות הזוגיות וחצי ממנו ברצועות האי-זוגיות




הקירוב ההסתברותי אומר **שבדיוק** חצי ברצועות הזוגיות **ובדיוק** חצי ברצועות האי זוגיות

זה רק קירוב!

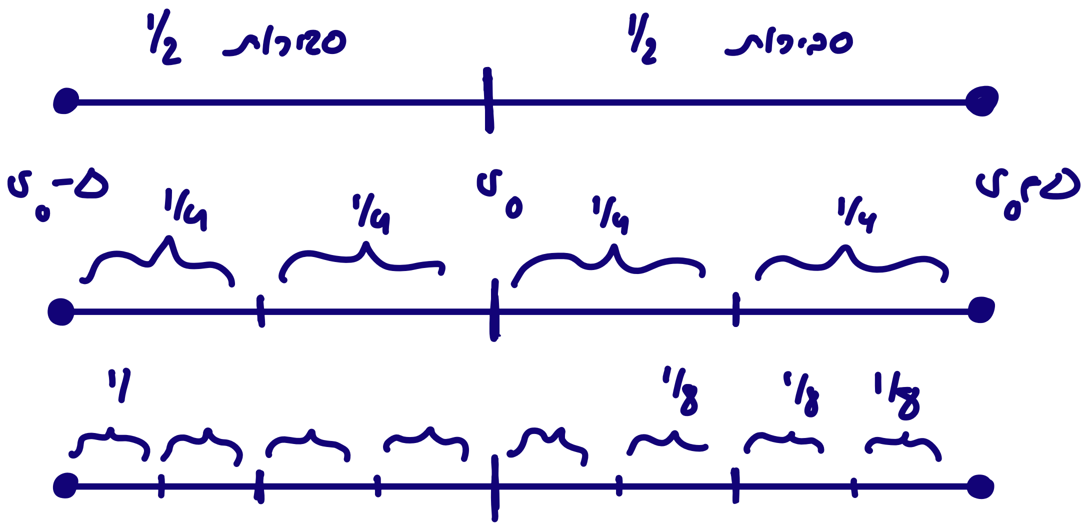
## כיצד למדל את היצג שלנו של $v, \omega$ ?




- **התפלגות אחידה** על $I=[v_0-\Delta, v_0+\Delta]$

אם $E, E_{xt}$ זרים, $I$ שמ, של $E$ ו $E_{xt}$

אותו האורך.




הסתברות של המאורע $v\in(a,b)\subseteq I$ הוא $\frac{|a-b|}{2\Delta}$

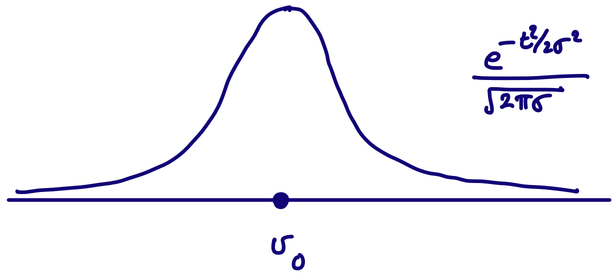
הסתברות שהמצב שלנו יפול עם זוגי המקורי כלפי מעלה

$$\text{Area}\left\{(v,\omega)\in[v_0-\Delta, v_0+\Delta]^2 \;\middle|\; \left\lfloor \frac{2v\omega}{\pi g}\right\rfloor \in 2\mathbb{Z}\right\}$$

$$=\iint_{[v_0-\Delta, v_0+\Delta]^2} 1_{[\text{זוגיות-זוגית}]}(\omega, v)\, d\omega\, dv$$

• <u>התפלגות נורמלית</u> $v \sim N(v_0, \sigma_v^2)$ כש

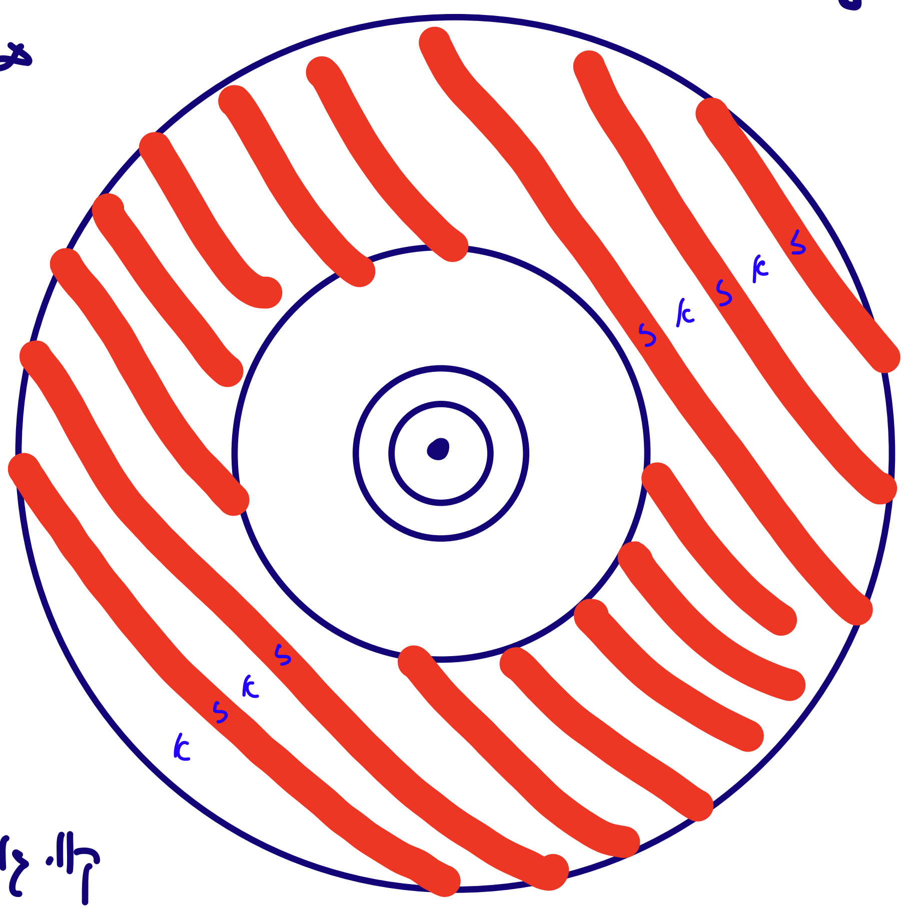
$\omega \sim N(\omega_0, \sigma_\omega^2)$




$\frac{e^{-t^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma}}$

הסבירות שהמטען יפגע בשבז המקורי כלפי מעלה :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1_{[\text{כדור-צלחות}]}(\omega, v)\cdot \frac{e^{-\omega^2/2\sigma_\omega^2 - v^2/2\sigma_v^2}}{2\pi\,\sigma_v\,\sigma_\omega}\, d\omega\, dv$$




קווי גובה של
הצפיפות הנורמלית

## פורמליזם נאיבי (שלב ג'):

- **מרחב מדגם (sample space)**: אוסף כל המצבים האפשריים של המערכת.

דוגמה: עבור המטבע מצבו אוסף כל הזוגות $(v,\omega)$
כלומר $\Omega = \mathbb{R}^2$ או $[0,\infty)^2$.

- **משתנה מקרי (random variable)**: פונקציה על מרחב המדגם.

דוגמה:

$$X(v,\omega) = \begin{cases} H & \left\lfloor \frac{2v\omega}{\pi g} \right\rfloor \in 2\mathbb{Z} \\ T & \left\lfloor \frac{2v\omega}{\pi g} \right\rfloor \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

רעיון בסיסי: "בחיים" יודעים את הערך של $X(v,\omega)$
אבל לא את הערכים המדויקים של $(v,\omega)$.

- **מידת הסתברות** (probability measure)
דרך קונסיסטנטית לשייך מספרים בין 0 ל-1
לתת קבוצות של מרחב המדגם. מייצג את הידע שלנו
על המצב הפיזיקלי של המערכת.

$E \subseteq \Omega \qquad E \longmapsto \mu(E) \in [0,1]$

הסתברות ש $(v,\omega) \in E$ =

דוגמה:

$$\mu(E) = \iint_E e^{-v^2/\sigma_v^2 - \omega^2/\sigma_\omega^2} \frac{dv\,d\omega}{2\pi\sigma_v\sigma_\omega}$$

## דרישות קונסיסטנטיות:

1. $\mu(\phi)=0$ , $\mu(\Omega)=1$
2. $A \subseteq B \Leftarrow \mu(A)\le\mu(B)$
3. אם $E=\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i$ אז $\mu(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$;

**משפט ויטלי:** לא קיימת מידה $\mu$ על הקטע $[0,1]$ שאינווריאנטית להזזות מודולו אחד: $\mu(E)=\mu(E+t \mod 1)$

$$\left( x+t \mod 1 = \begin{cases} x+t & x+t\in[0,1) \\ x+t-n & x+t\in[n,n+1) \end{cases} \right)$$

**הוכחה ($[a,b]=[0,1]$ בגבול):** נגדיר יחס שקילות $\sim$ על $[0,1]$ ע"י $x-y\in\mathbb{Q} \Longleftrightarrow x\sim y$.

יהי $E$ בוחר נציגים של מחלקות השקילות.

תהי $\mathbb{Q}=\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ מניה של הרציונליים. אז

$$E_n := \{x\in[0,1) : x\in q_n+E \pmod 1\}$$

זרות בזוגות (כי אם $x\in(q_n+E)\cap(q_l+E)$ אז $x-q_n$ ו- $x-q_l$ שני מספרים שקולים מתוך $E$).

ובנוסף $[0,1)=\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i$.

אבל $\mu(E_i)$ שווה לכל ה-$i$-ים אז או שבסכום מקבלים
הם אפס, או שבסכום אינסוף.

**מסקנה:** הפורמליזם שלנו לא ישים.

**פתרון:** להגדיר את $\mu$ רק על חלק מהקבוצות

## הפורמליזם המתמטי הנכון (תורת המידה)

1) מרחב מדגם: קבוצה $\Omega$

2) σ-אלגברה: אוסף $\mathcal{F}$ של תת קבוצות של $\Omega$ (שנקראות קבוצות מדידות) שעבורו:

- $\phi, \Omega \in \mathcal{F}$
- אם $E \in \mathcal{F}$ אז $E^c = \Omega \setminus E \in \mathcal{F}$
- לכל סדרה $E_1, E_2, E_3, \ldots \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i , \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$.

3) מידת הסתברות: פונקציה $\mu : \mathcal{F} \to [0,1]$ שמקיימת

- $\mu(\phi) = 0, \mu(\Omega) = 1$
- אם $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{F}$ זרות בזוגות אז

$$\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

4) פונקציה מדידה (משתנה מקרי) היא פונקציה $f : \Omega \to \mathbb{R}$ שעבורה כל קבוצה מהצורה $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq t\}$ שייכת ל- $\mathcal{F}$.

אפשר להגדיר את ההתפלגות של $f$:

$$F(t) = \mu \underbrace{\{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq t\}}_{\in \mathcal{F}}$$

<u>סיכום</u>: על מנת לתאר התנהגות רנדומית של מערכת דטרמיניסטית

- נגדיר את <u>מרחב המצבים האפשריים</u> $\Omega$ של המערכת
- נבנה <u>מידת הסתברות</u> $\mu$ על $\Omega$ שתתאר את הידע שלנו על הסבירות היחסית של $\omega \in \Omega$
- נציג את הגודל שמעניין אותנו <u>כפונקציה מדידה</u> $X:\Omega \to \mathbb{R}$
- נחקור את $X$ <u>כמשתנה מקרי</u>.

<u>הקירוב ההסתברותי</u>:

ההתפלגות של $X$ $\mu\{\omega : X(\omega) \leq t\}$ $\approx$ ההתפלגות של משתנה מקרי "קלאסי"

הפורמליזם המתמטי הנדרש לצורך כך הוא <u>תורת המידה</u>.