הרצאה 2: מבוא לתורה הארגודית

סיכום קצר של ההרצאה הקודמת: כיצד לנתח התנהגות רנדומית של מערכת דטרמיניסטית?

- הצגנו את הגודל שנראה מקרי כפונקציה של מצב המערכת
- בנו מידת הסתברות על מרחב המצבים שמייצג את הסבירות של כל המצבים האפשריים של המערכת
- השוו את ההתפלגות של הגודל $F(t)=\mu\{\omega \mid X(\omega)\le t\}$ להתפלגויות הרנדומיות שנצפו במערכת.

היום: עיון במערכות דינמיות - מערכות שמצבן משתנה בזמן

- מרחב המצבים האפשריים: קבוצה Ω
- חוק התנועה: פונקציה $T:\Omega\to\Omega$ מדידה ($\forall E\in\mathcal{F}\ \ T^{-1}E\in\mathcal{F}$)

"(מערכת במצב ω בזמן t) $\longmapsto$ (מערכת במצב $T(\omega)$ בזמן $t+1$)".

- מצב בזמן $t=0$: ω
- — " — $t=1$: $T(\omega)$
- — " — $t=2$: $T(T(\omega))=(T\circ T)(\omega)$

$\cdots$

מצב בזמן $t=n$: $T^n(\omega)=(T\circ\cdots\circ T)(\omega)$

- גודל מדיד: $\psi:\Omega\to\mathbb{R}$. "כשהמערכת במצב ω מודדים $\psi(\omega)$".
- סדרה עתית (time series): $\{\psi(T^n\omega)\}_{n=1}^{\infty}$. מה שנמדוד בזמן n אם המצב ההתחלתי היה ω.
- נניח שיש לנו מידת הסתברות μ על Ω שמייצגת את הסבירות היחסית של מצבים אפשריים שונים של המערכת.

תזכורת מתורת ההסתברות

תהליך סטוכסטי הוא סדרה של משתנים מקריים X_i עם **התפלגות משותפת**: חוק שמאפשר לחשב לכל סדרה של קטעים $I_i \subseteq \mathbb{R}$ את (וכו') $\mathbb{P}\text{rob}[X_1 \in I_1, \dots, X_n \in I_n]$.

הסדרה העוקבת $\{\varphi \circ T^n\}_{n=1}^{\infty}$ היא תהליך סטוכסטי! ההתפלגות המשותפת היא

$$\mathbb{P}\text{rob}[\varphi \in I_0, \varphi \circ T \in I_1, \dots, \varphi \circ T^n \in I_n]$$

$$:= \mu\{\omega \in \Omega : \varphi(\omega) \in I_0, \varphi(T\omega) \in I_1, \dots, \varphi(T^n\omega) \in I_n\}$$

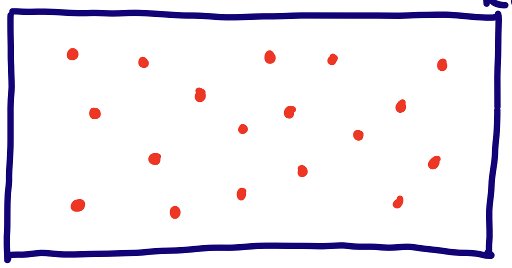
$$\equiv \mu\left(\bigcap_{i=0}^{n} \{\omega \in \Omega : \varphi \circ T^i \in I_i\}\right)$$

$$\equiv \mu\left(\bigcap_{i=0}^{n} (T^{-i} \circ \varphi^{-1})(I_i)\right)$$

(המדידות של T ושל φ מבטיחה שהקבוצה בסוגריים מדידה.)

הרעיון הבסיסי: על מנת להסביר התנהגות רנדומית של סדרת מדידות φ בזמנים $0, 1, 2, \dots$:

- בטאו את **תוצאות המדידה כפונקציה** $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ על מרחב המצבים
- בנו **מידת הסתברות** על מרחב המצבים שמייצגת את אי-הוודאות בקשר למצב הספציפי של המערכת
- חקרו את תכונות **התהליך הסטוכסטי** $\{\varphi \circ T^n\}_{n=0}^{\infty}$ המתקבל



דוגמא ממכניקה קלאסית: גז בקופסא

$N\sim 10^{24}$ חלקיקים במיקומים $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N$

משוואות התנועה הן

$$m\frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2} = \underbrace{\vec{F}_i(x_1,\dots,x_N)}\qquad (i=1,\dots,N)$$

הכח שהחלקיקים x_j $(j\neq i)$ מפעילים על חלקיק i.

משוואות התנועה הן <u>מסדר שני</u>, לכן כדי לפתור אותן צריך לדעת $\vec{x}_i(0)$ וגם את $\vec{v}_i:=\vec{x}_i'(0)$

לכן מרחב המצבים <u>אינו</u> $\{(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N)\}$;

<u>מרחב המצבים</u> הוא $\{(\underbrace{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N}_{\text{מיקום}};\underbrace{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_N}_{\text{מהירות}})\}$

<u>מהו חוק התנועה</u>?

$$T:(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N;\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_N)\mapsto(\vec{x}_1(1),\dots,\vec{x}_N(1);\vec{v}_1(1),\dots,\vec{v}_N(1))$$

כאשר $(\vec{x}_1(t),\dots,\vec{x}_N(t);\vec{v}_1(t),\dots,\vec{v}_N(t))$ הוא הפתרון <u>היחיד</u> של $(*)$ עם תנאי התחלה

$$\begin{cases}\vec{x}_i(0)=\vec{x}_i\\ \vec{v}_i(0)=\vec{v}_i\end{cases}.$$

$(*)$ לא יודעים לחשב את T במפורש

אבל, אם F מספיק חלק, יודעים ש T קיימת ומוגדרת היטב.

זהו "משפט הקיום והיחידות למשוואות דיפרנציאליות".

דוגמה לגודל מעניין : הטמפרטורה !

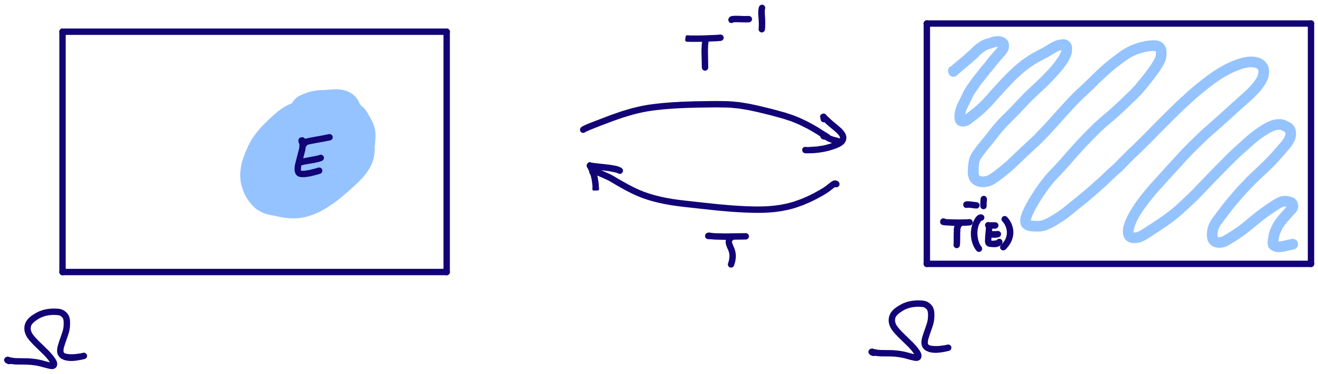
$$f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N;\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_N)=\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m|v_i|^2=\text{אנרגיה קינטית ממוצעת}$$

<u>מהי מידת ההסתברות הטבעית</u>? נניח שהכוחות משמרים

$\vec{F}_i(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N)=\nabla U(x_1,\dots,x_N)$ (למשל כוח משיכה. אבל <u>לא</u> כוחות חיכוך)

<u>עובדה (Liouville)</u>: קיימת מידה "טבעית" μ על מרחב המצבים $\Omega=\{(x_1,\dots,x_N;v_1,\dots,v_N)\}$ שנשמרת ע"י חוק התנועה*:

$$\mu(T^{-1}(E))=\mu(E).$$



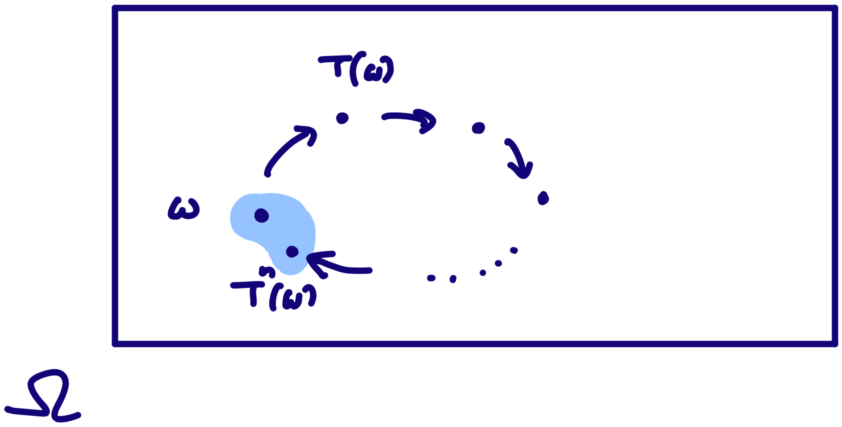
מקובל לעבוד עם המידה הזו.

<u>הגדרה</u>: מידה μ נקראית <u>מידה אינווריאנטית</u> עבור העתקה T אם $\mu(T^{-1}E)=\mu(E)$ לכל קבוצה מדידה E.

---

* למי שמכיר: מביאים את משוואות התנועה לצורה ההמילטונית (Hamiltonian form) ($H=$ אנרגיה כוללת, $\vec{p}_i=$ תנע, $\vec{q}_i=$ מיקום) $\dot{\vec{q}}_i=-\frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i}$, $\dot{\vec{p}}_i=\frac{\partial H}{\partial \vec{q}_i}$ ואז המידה היא מידת הנפח הרגילה על $\{(\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_N;\vec{q}_1,\dots,\vec{q}_N)\}$.

<u>משפט פואנקרה</u>: תהי μ מידת הסתברות T-אינווריאנטית עבור העתקה מדידה כללית $T:\Omega\to\Omega$. לכל קבוצה מדידה E, לקבוצה $W=\{\omega\in E : \forall n\geq 1 \;\; T^n(\omega)\notin E\}$ יש מידה <u>אפס</u>.



לכן "כמעט כל" מסלול יחזור לסביבה ממנה התחיל.

<u>הוכחה</u>: הקבוצות $T^{-n}W$ זרות בזוגות כי אם $n>m$ אז

$$T^{-n}(W)\cap T^{-m}(W) = T^{-m}(W\cap T^{-(n-m)}W) = \emptyset .$$

לא חוזרים ל E אף פעם

חוזרים ל-E אחרי $n-m$ צעדים

$$1\geq \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}W\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\mu(T^{-n}W) = \qquad \Leftarrow$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\mu(W) = \infty\cdot\mu(W)$$

$$\mu(W)=0 . \qquad \Leftarrow$$

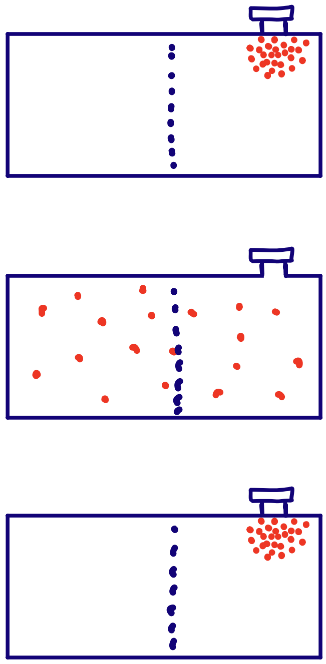
$\square$

דוגמא (פרדוקס Zermelo):

עבר

הווה

עתיד ?!



נמלא מיכל ריק בגז.

- בזמן 0 כל הגז ליד הפיה
- אח"כ הגז מתפשט וימלא את המיכל
- לפי משפט פואנקרה מתי שהוא יחזור הגז ויתכנס לאזור הפיה.

זה כמובן סותר את מה שנלמד בתרמו.

$$\boxed{\text{האם הרסנו כרגע את המכניקה הקלאסית?}}$$

התשובה של הפיזיקאים: לא, כי "סביר" שהזמן n שמשפט פואנקרה חוזה גדול מאוד (יותר מגיל היקום). זה עדיין פתוח מתמטית.

המשפט הבא מסביר למה הפיזיקאים חושבים ש $n >>$ גיל היקום:

משפט כץ (Kac): נניח ש μ מידת הסתברות אינווריאנטית עבור העתקה הפיכה* ומדידה T. נניח ש E קבוצה מדידה עם מידה חיובית, שעבורה מתקיים התנאי הבא:

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(E)\right) = \mu(\Omega) = 1 \qquad (*).$$

אז תוחלת הזמן שצריך לחכות עד ש $\omega \in E$ יחזור ל-E היא $1/\mu(E)$.

* אפשר להוריד את הנחת ההפיכות בגרסא יותר מסובכת.

ה"הנחה הארגודית" מבטיחה ש (*) ותקיים (אבל היא טרם הוכחה מתמטית). במקרה שלנו $\mu(E) \sim 1/2^{10^{23}}$ ולכן תוחלת זמן החזרה היא $\sim 2^{10^{23}}$ שזהו גדול מגיל היקום (לא משנה מה היחידות....).

<u>הוכחה של משפט Kac</u>: נסמן $\varphi(\omega)=\inf\{n\geq 1 : T^n(\omega)\in E\}$

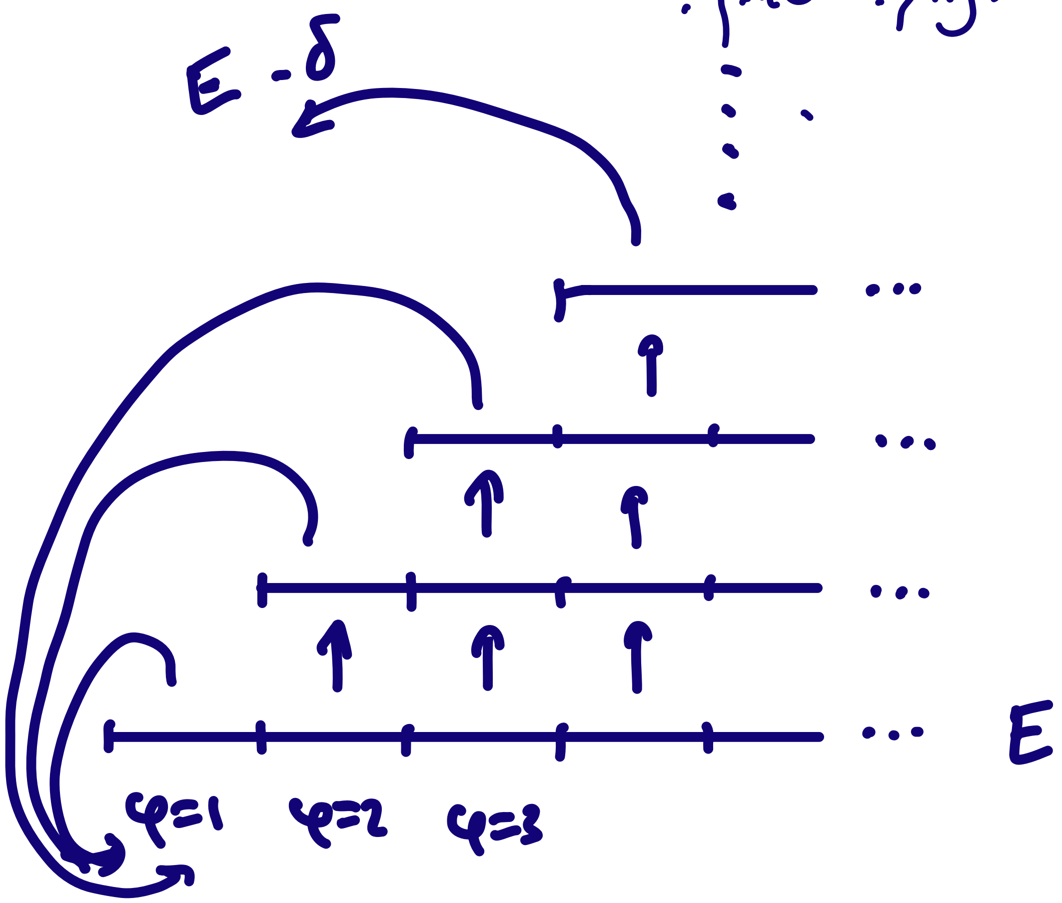
אנחנו צריכים להראות ש

$$\frac{1}{\mu(E)} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\mu\{\omega\in E : \varphi(\omega)=n\}}{\mu(E)} .$$

נרמול של

המידה המותנה של μ

נחלק את E לקבוצות $\{\omega \mid \varphi(\omega)=n\}$ $(n=1,2,3,\ldots)$, ונראה את הדינמיקה שלהן.



נסמן $[\varphi=k] := \{\omega\in E : \varphi(\omega)=k\}$. לפי משפט הנשנות של פואנקרה:

$$E = \biguplus_{k=1}^{\infty} [\varphi=k] \cup (\text{קבוצה ממידה אפס}).$$

מספיק להוכיח ש:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\ell=0}^{k-1} T^{\ell}[\varphi=k] \cup (\text{קבוצה ממידה אפס})$$

- $\supseteq$: ברור
- $\subseteq$: נניח ש $\omega\in E$ ו- $n\geq 0$. ממשפט פואנקרה (מופעל כמה פעמים) נובע שלכל ω מחוץ לקבוצה ממידה אפס, יש $n_k(\omega)\to\infty$ כך ש $T^{n_k(\omega)}(\omega)\in E$. נניח ש $n_k(\omega)\leq n < n_{k+1}(\omega)$. אז $T^n(\omega)\in T^{n-n_k}(T^{n_k}\omega)$, $\varphi(T^{n_k}\omega)=n_{k+1}-n_k$. לכן

$$T^n(\omega) = T^{n-n_k}(T^{n_k}(\omega)) \in \bigcup_{\ell=0}^{n_{k+1}-n_k} T^{\ell}[\varphi=n_{k+1}-n_k].$$

$$\subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\ell=0}^{k-1} T^{\ell}[\varphi=k]$$

בנוסף, הקבוצות $T^{\ell}[\varphi=k]$ $(k=1,2,3,\dots;\ \ell=0,\dots,k-1)$ זרות.

הוכחה: נניח ש $x\in T^{\ell_i}[\varphi=k_i]$ $(i=1,2)$ ונראה ש $\ell_1=\ell_2$, $k_1=k_2$.

<u>מכיוון ש T הפיכה</u>, אם $x\in T^{\ell_i}[\varphi=k_i]$, אז

$$\underbrace{\inf\{j>0:\ T^{-j}(x)\in E\}}_{=\ \ell_i}+\underbrace{\inf\{j>0:\ T^{j}(x)\in E\}}_{=\ k_i-\ell_i}=k_i$$

מכיוון שהצד השמאלי תלוי רק ב-x, $\boxed{k_1=k_2}$.

בנוסף

$$\inf\{j>0:\ T^{-j}(x)\in E\}=\ell_i$$

מכיוון שהצד השמאלי תלוי רק ב-x, $\boxed{\ell_1=\ell_2}$. הוכחנו מה שרצינו.

לסיכום:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}T^{n}(E)=\biguplus_{k=1}^{\infty}\biguplus_{\ell=0}^{k-1}T^{\ell}(E\cap[\varphi=k])\cup(\text{קבוצה ממידה אפס})$$

לכן,

$$1\underset{(*)}{=}\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}T^{n}(E)\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{k-1}\mu\circ T^{\ell}(E\cap[\varphi=k])$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{k-1}\mu(E\cap[\varphi=k])=\sum_{k=1}^{\infty}k\,\mu(E\cap[\varphi=k])$$

נחלק ב-$\mu(E)$ ונקבל

$$\frac{1}{\mu(E)}=\sum_{k=1}^{\infty}\ell\,\frac{\mu(E\cap[\varphi=k])}{\mu(E)}$$

כנדרש.