הרצאה 3: תכונות סטטיסטיות של סדרות עיתיות

<u>חזרה על תכונת קולמוגורוב</u>: נניח ש $T:\Omega\to\Omega$ מערכת דינמית מוגדרת במידת הסתברות אינוריאנטית μ, ותהי $\psi:\Omega\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה.

<u>הסדרה העתית</u> (time series) של ψ: $\psi, \psi\circ T, \psi\circ T^2, \ldots$

<u>תכונת קולמוגורוב</u>: נחשוב על $X_n=\psi\circ T^n$ כעל <u>תהליך סטוכסטי</u> עם התפלגות משותפת

$$\mathrm{Prob}\left(X_i\in(a_i,b_i),\ i=1,\ldots,n\right)$$
$$:=\mu\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega\in\Omega:\psi(T^i(\omega))\in(a_i,b_i)\}\right)$$

נחקור תכונות של $\{X_n\}$ כתהליך סטוכסטי.

<u>דוגמאות לשאלות מעניינות שניתן לשאול</u>:

- האם מתקיים <u>חוק המספרים הגדולים</u>?

$$\mathrm{Prob}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mathbb{E}(X_1)\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0\right)\overset{?}{=}1\ ?$$

- האם מתקיים <u>משפט הגבול המרכזי</u>?

$$\mathrm{Prob}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathbb{E}(X_i))\in(a,b)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{?}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_a^b e^{-t^2/2\sigma^2}dt\ ?$$

(חשבו על לוח גלטון)

- האם מתקיים <u>חוק הלוגריתם האיטרטיבי</u>?

$$\mathrm{Prob}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt{2\sigma n\log\log n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathbb{E}(X_i))=1\right)\overset{?}{=}1\ ?$$

מסתבר שחוק המספרים הגדולים מתקיים בכלליות רבה מאוד

(התכונות האחרות מתקיימות לפעמים, אך לא תמיד):

המשפט הארגודי (Birkhoff): נניח ש-μ היא מידת הסתברות אינווריאנטית של העתקה T. אז לכל $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ מדידה וחסומה, וכל ω מחוץ לקבוצה ממידה אפס, קיים הגבול

$$L(\omega) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \varphi(T^n\omega)$$

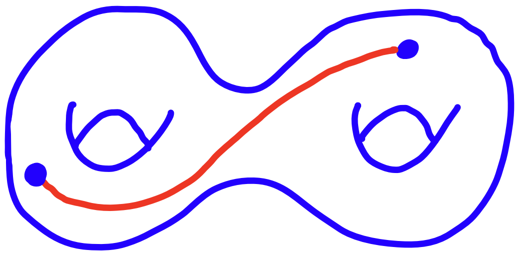
בנוסף:

א. L פונקציה אינווריאנטית: $L(T\omega)=L(\omega)$ ו-$\int_\Omega L\,d\mu = \mu(E)$

ב. אם T ארגודית (הגדרה למטה) אז $L=\int_\Omega f\,d\mu$.

ארגודיות: לכל $E\in\mathcal{F}$ כך ש-$T^{-1}E=E$, או ש-$\mu(E)=0$ או ש-$\mu(E)=1$.

דוגמא 1 (זרימות גאודזיות). דמיינו משטח דו-מימדי סגור



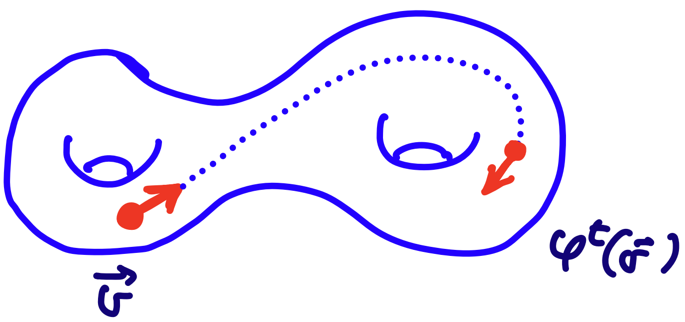
- גיאודזה הוא העקום הקצר ביותר על פני המשטח בין שתי נקודות על פני המשטח

- האגד המשיק הנורמלי של משטח M:

$$\Omega = \{ \text{כל וקטורי היחידה המשיקים ל- } M \}$$

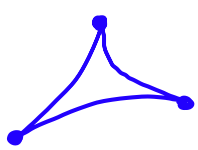
- המידה הטבעית:
  - נקודת הבסיס של $\vec{v}$ מתפלגת אחיד על M
  - הכיוון של $\vec{v}$ מתפלג אחיד על $[0,2\pi)$
  - נקודת הבסיס והכיוון בלתי-תלויים

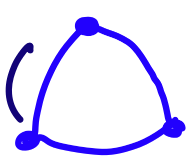
- הזרימה הגיאודזית: $\varphi^t : \Omega \to \Omega$



״תזיזו את $\vec{v}$ מרחק t לאורך הגיאודזה שמתחילה ב- $\vec{v}$״

- למשטח עקמומיות שלילית אם סכום הזוויות של כל משולש גאודזי קטן מ- 180°





(זה ההפך הגמור ממה שקורה על פניו של כדור:

משפט (Hedlund): הזרימה הגיאודזית על יריעה דו מימדית עם עקמומיות שלילית היא ארגודית.

מסקנה: נמלה שנעה על פני משטח כזה, תבקר בכל תת קבוצה ממידה חיובית בתדירות זמנים שווה למידת הקבוצה.

הוכחה: $\frac{1}{N}\int_0^N 1_E(T^s\bar{\omega})\,ds = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\int_k^{k+1} 1_E(T^s\bar{\omega})\,ds = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^1 (1_E\circ T^s)(T^k\bar{\omega})\,ds$

$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\psi(T^k\bar{\omega})$, $\psi(\bar{\omega})=\int_0^1 1_E(T^s\bar{\omega})\,ds$.

משפט (Ratner): תחת ההנחות הללו, לכל $\psi:\Omega\to\mathbb{R}$ רציפה הולדר "לא מנוונת" מתקיים משפט הגבול המרכזי: קיים $\sigma>0$ כך ש

$$\mu\left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{N}}\left[\int_0^N \psi(\varphi^t(\omega))\,dt - N\int\psi\,d\mu\right]\in(a,b)\right\} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_a^b e^{-t^2/2\sigma^2}\,dt$$

"לא מנוונת": יש שני גאודזיים סגורים γ_1,γ_2 כך שהממוצע של ψ על γ_1 שונה מהממוצע של ψ על γ_2.

משפט (Denker Phillip): תחת אותן הנחות, מתקיים גם חוק הלוגריתם האיטרטיבי:

$$\mu\left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2 n\log\log n}}\left[\int_0^n \psi(\varphi^t(\bar{\omega}))\,dt - \int_\Omega\psi\right]=1\right\}=1$$

דוגמה 2: $T:[0,1]\to[0,1]$, $T(x)=10x \pmod 1$,

- $\mathcal{F}$: ה-σ-אלגברה הכי קטנה שמכילה את כל הקטעים
- μ = התפלגות אחידה על הקטע. מוגדרת פורמלית ע"י

$$\mu(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|I_i| : E\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \,,\ I_i \text{ קטעים}\right\}$$

(בקורס בתורת המידה מוכיחים ש-μ σ-אדיטיבית על $\mathcal{F}$)

משפט: T הנ"ל משמרת מידה וארגודית

מסקנה (Borel): לכל x ב-$[0,1]$ מחוץ לקבוצה ממידה אפס מתקיימת התכונה הבאה. **כל** מילה $w\in\{0,1,\dots,9\}^N$ מופיעה בפיתוח העשרוני של x בשכיחות הנכונה $\left(\frac{1}{10}\right)^N$.

הוכחה: ראשית נשים לב לעובדה הבאה: אם הפיתוח העשרוני של x הוא $0.d_1d_2d_3\cdots$, אז

$$T(x)=10x \pmod 1 = 0.d_2d_3\cdots$$

$$T^2(x)=0.d_3d_4\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$T^n(x)=0.d_{n+1}d_{n+2}\cdots$$

בפרט, המילה $w=w_1\cdots w_N$ מופיעה במקום ה-n-י אמ"מ

$$T^{n-1}(x)=0.w_1\cdots w_N***\cdots \in\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{w_i}{10^i}\,,\ \sum_{i=1}^{N}\frac{w_i}{10^i}+\frac{1}{10^N}\right) =: E \,.$$

לכן צפיפות הפעמים ש-w מופיעה בפיתוח העשרוני של x היא בדיוק

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_E\left(T^{n-1}(x)\right)$$

לפי המשפט הארגודי הערך של האינטגרל הזה הוא $\int_0^1 1_E\, d\mu = |E| = \frac{1}{10^M}$.

כעת ניקח מניה $w_1, w_2, w_3, \dots$ של כל המילים הסופיות.

לכל אחת מהקבוצות הבאות מידה מלאה ב $[0,1)$:

$E_i = \{x\in[0,1):$ w_i מופיעה בפיתוח העשרוני של x בצפיפות הנכונה$\}$.

$\Leftarrow$ ל $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ מידה מלאה (כי $\mu\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) \le \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i^c) = 0$).

לכל $x\in\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ התכונה הרצויה.

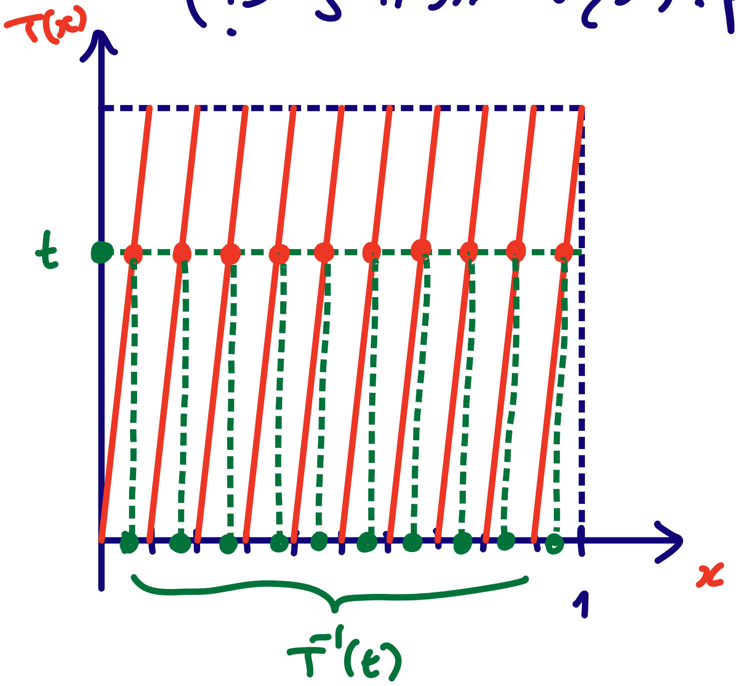
<u>הגדרה</u>: מספר $x\in[0,1)$ נקרא <u>נורמלי</u> אם לכל $b=2,3,4,\dots$ הפיתוח של x לפי בסיס b מכיל כל מילה סופית $w\in\{0,1,\dots,b-1\}^N$ בצפיפות $1/b^M$.

<u>תרגיל</u>: כל $x\in[0,1)$ מחוץ לקבוצה ממידה אפס הוא נורמלי.

<u>שאלה פתוחה מפורסמת</u>: תנו דוגמא ספציפית למספר נורמלי.

הוכחה ש$T(x)=10x \pmod 1$ משמרת מידה וארגודית

קל מאוד להוכיח ש T משמרת מידה נשתמש בתכונה הידועה הבאה של מידת לבג: אם $\lambda\cdot E+c=\{\lambda t+c : t\in E\}$ ו- E מדידה אזי, $\mu(\lambda E)=\lambda\mu(E)$. (תרגיל: הוכיחו זאת!)



לכל $t\in E$, הפתרונות של המשוואה
$$T(x)=t$$
הם $x=\frac{t}{10}+\frac{k}{10}$ $(k=0,\dots,9)$
לכן $T^{-1}(E)=\biguplus_{k=0}^{9}\left(\frac{1}{10}E+\frac{k}{10}\right)$.

מכאן נובע ש
$$\mu(T^{-1}E)=\sum_{k=0}^{9}\mu\left(\frac{1}{10}E+\frac{k}{10}\right)=\sum_{k=0}^{9}\mu\left(\frac{1}{10}E\right)=10\times\frac{1}{10}\mu(E)=\mu(E).$$

לפני שנוכיח את הארגודיות של T, נוכיח את הלמה הבאה:

<u>למה</u>: לכל $E\in\mathcal{B}$ ולכל $\varepsilon>0$ יש מספר סופי של קטעים $I_1,\dots,I_n$ כך ש $\mu(E\triangle\bigcup_{i=1}^{n}I_i)<\varepsilon$.

<u>הוכחה</u>: ניקח קטעים I_i כך ש $E\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$ ו- $\sum|I_i|<\mu(E)+\varepsilon$.

בה"כ I_i <u>קטעים זרים</u>, אחרת נניח $\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i=\biguplus_{i=1}^{\infty}\left(I_i\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}I_j\right)$
ונשים לב לכך שניתן להציג את $I_i\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}I_j$ כאיחוד זר סופי של קטעים.

לסיכום $E \subseteq \biguplus_{i=1}^{\infty} I_i$ ו- $\mu(E) \le \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \le \mu(E)+\varepsilon$.

מכיוון שבהכרח $\sum |I_i| < \infty$, יש N כך ש $\sum_{i=N+1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$. אזי

$$\mu\left(E \triangle \biguplus_{i=1}^{N} I_i\right) \le \mu\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i\right) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} I_i \setminus E\right)$$

$$\le \Big[\underbrace{\mu\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right)}_{=0} + \underbrace{\mu\left(\bigcup_{i=N+1}^{\infty} I_i\right)}_{<\varepsilon}\Big] + \underbrace{\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \setminus E\right)}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon .$$

<u>הוכחת הארגודיות:</u> נוכיח שלכל $E,F \in \mathcal{F}$,

$$\mu(E \cap T^{-n} F) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 . \qquad (*)$$

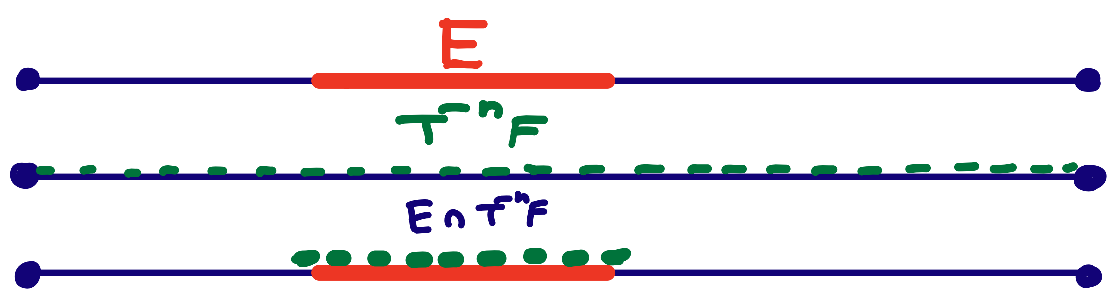
מכאן ינבע שאם $T^{-1}E = E$ אזי

$$\mu(E) = \mu(E \cap \underbrace{T^{-n}E}_{=E}) \longrightarrow \mu(E)^2$$

$\Leftarrow$ $\mu(E)=\mu(E)^2$ $\Leftarrow$ $\mu(E)=0$ או 1.

מכיוון שכל קבוצה מדידה ניתן לקרב ע״י איחוד של קטעים, מספיק להוכיח את $(*)$ כאשר E ו- F <u>קטעים</u>.

נבחין ש $T^{-n}E = \biguplus_{k=0}^{10^n-1} \frac{1}{10^n}E + \frac{k}{10^n}$. לכן



נכתוב $E=[a,b]$ ו- $F=[c,d]$.

אז

$$E\cap\tau^{-n}F=\bigcup_{\substack{\frac{k+1}{10^n}>a,\ \frac{k-1}{10^n}<b}}\left(\frac{1}{10^n}(a,b)+\frac{k}{10^n}\right)\cup\left(\text{שני קטעים קטנים}\right)$$

$$=\bigcup_{10^n a-1<k<10^n b+1}\left(\frac{1}{10^n}(c,d)+\frac{k}{10^n}\right)\cup\left(\text{שני קטעים קטנים}\right)$$

לכן

$$\mu(E\cap\tau^{-n}F)\approx 10^n(b-a)\times\frac{(d-c)}{10^n}+O\left(\frac{1}{10^n}\right)$$

$$=(b-a)(d-c)+O(10^{-n})$$

$$\longrightarrow (b-a)(d-c)=\mu(E)\mu(F)$$